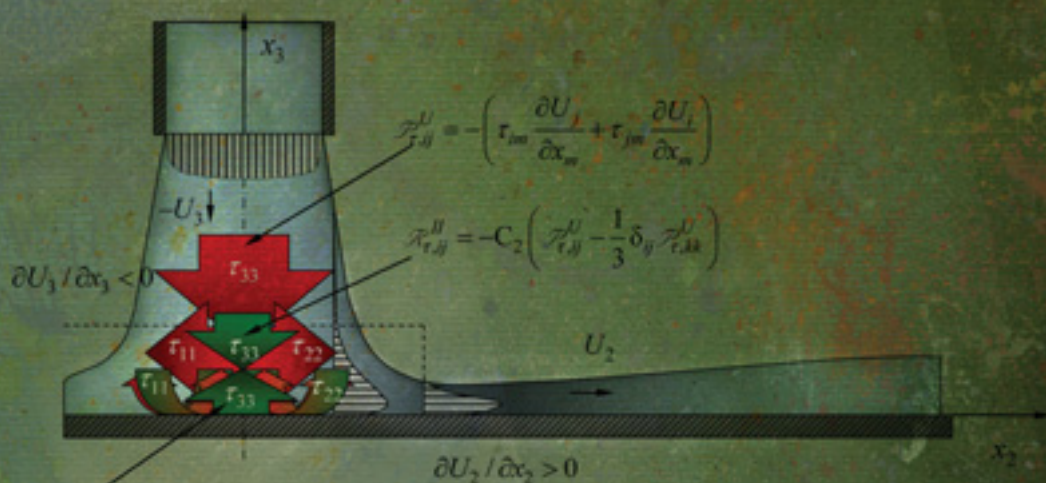


Милош Бањац

Математичко моделирање процеса преношења количине кретања и количине топлоте који се остварују при удару турбулентног млаза у загрејану плочу



$$\bar{\tau}_{r,ij}^{w,H} + \bar{\tau}_{r,ij}^{w,H} = C_w 2 f_w \left( \bar{\tau}_{r,km}^H n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \bar{\tau}_{r,kl}^H n_k n_l - \frac{3}{2} \bar{\tau}_{r,kl}^H n_k n_l \right) + \bar{\tau}_{r,ij}^{w,H}$$



**Милош Бањац**

**Математичко моделирање процеса преношења количине  
кретања и количине топлоте који се остварују при удару  
турбулентног млаза у загрејану плочу**

Др Милош Ј. Бањац

**МАТЕМАТИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ ПРОЦЕСА ПРЕНОШЕЊА  
КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА И КОЛИЧИНЕ ТОПЛОТЕ КОЈИ СЕ  
ОСТВАРУЈУ ПРИ УДАРУ ТУРБУЛЕНТНОГ МЛАЗА У  
ЗАГРЕЈАНУ ПЛОЧУ**

Рецензенти:

Др Владимир Стевановић, ред. проф.  
Др Богосав Васиљевић, проф. у пензији  
Др Жарко Стевановић, научни саветник, ИНН “Винча”

Издавач:

МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ  
Универзитет у Београду  
Ул. Краљице Марије бр. 16, Београд  
тел. (011) 3370-760  
фах. (011) 3370-364  
www.mas.bg.ac.rs

За издавача:

Декан, др Милорад Милованчевић, ред. проф.

Уредник:

Др Александар Обрадовић ред. проф.  
Председник комисије за издавачку делатност  
Машинског факултета, Универзитет у Београду

Тираж: 150 примерака

Штампање одобрила:

Комисија за издавачку делатност  
Машинског факултета, Универзитет у Београду  
и  
Декан Машинског факултета, Универзитет у Београду  
бр. одлуке 269/14,  
од 27.3.2014. године

Штампа: “Planeta print”  
Рузвелтова 10, 11000 Београд  
www.planeta-print.co.rs

Београд, 2014. године

ISBN 978-86-7083-825-3

---

©Сва права задржава аутор. Није дозвољено да без предходне писмене дозволе аутора било који део ове монографије буде снимљен, емитован или репродукован, укључујући, али не и ограничавајући се на фотокопирање, фотографију, магнетни или било који други вид записа.

## **Предговор**

*Употреба флуидних млазева у процесима хлађења и грејања нашла је широку примену у многим гранама индустрије. Главни разлози за то леже у могућности остваривања интензивног прелажења топлоте у зауставној и непосредној околини зауставне области флуидног млаза, као и могућности локализовања дејства поменутих процеса. Такође, лака промена вредности коефицијента прелажења топлоте, само промене протока флуида кроз млазницу, односно променом растојања између млазнице и површи, као и једноставна и поуздана конструкција, уз релативно мали простор за уградњу и примену, учинили су употребу ове врсте флуидних токова веома привлачном.*

*Распрострањеност употреба ове врсте флуидних токова неметнула је потребу за њиховим изучавањем, односно дефинисањем математичких израза (критеријалних једначина) која ће бити у стању да довољно тачно предвиде дешавања у овим процесима. Међутим, сложеност и стохастичност турбулентних струјања која се остварују при овим процесима и велики број утицајних чинилаца, спречили су да се достигне задовољавајући квалитет, а пре свега универзалност емпиријских израза, тј. одговарајућих критеријалних једначина.*

*Са друге стране, ни савремени приступ решавања овог проблема комерцијалним CFD софтверима није дао задовољавајуће резултате. Чак и више од тога, покушаји нумеричких симулација овог проблема помоћу тзв. стандардних модела турбулентних напона који се данас користе у комерцијалним CFD софтверима, дали су неочекивано лоше резултате.*

*Све ово, распрострањеност употребе ових процеса, бројност али неуниверзалност емпиријских израза, лоша предвиђања комерцијалних CFD софтвера, били су разлози да се ова монографија посвети проблематици процеса преношења количине кретања и топлоте при удару турбулентног млаза у равну плочу, односно проналажења математичког модела (модела турбулентних напона) који ће бити у стању да довољно тачно опише ове процесе.*

*Да би уопште било могуће приступити провери квалитета резултата нумеричких симулација, неопходно је имати јасна и прецизна сазнања о физичким појавама и флуидним структурама које настају у овом процесу. Због тога је у Поглављу 2 дат општи приказ и анализа брзинских, напонских и температурних поља која се формирају при овој врсти струјања флуида, уз објашњења узрока физичких процеса, флуидних структура и поремећаја које изазивају настајак и пораст турбуленције. У истом поглављу дат је и приказ неких до сада објављених експерименталних резултата и одговарајућих критеријалних израза, уз њихову анализу. Посебно детаљно је дат приказ репрезентативних експерименталних резултата, тј. оних експерименталних података који ће послужити као основа за поређење са резултатима нумеричких прорачуна, односно за процену квалитета корекција, учињених у математичким моделима турбуленције.*

*Проблематици проналажења модела који ће бити у стању да у ширем опсегу Рејнолдсових бројева, довољно тачно предвиди струјна и температурска обележја ове “нестандардне” врсте турбулентног струјања посвећено је Поглавље 4. У овом поглављу, уз детаљан преглед литературе која прати ову област, приказан је поступак прилагођавање “стандардни” напонски модели из тзв. категорије модела за велике вредности Рејнолдсових турбулентних бројева, на тзв. напонски модел за мале вредности Рејнолдсових турбулентних бројева, као и поступка корекције изабраног напонског модела ради његовог прилагођавања “нестандардним” условима, присутним при овој врсти струјања.*

*Због сложености и обимности проблематике математичког описивања турбуленције, али и неопходности њеног познавања ова област је издвојена и дата у Прилозима. И иако су Прилози писани тако да пре свега буду допуна основног текста монографије, а како би га растеретили гломазних извођењима из области турбуленције и њеног моделирања, они се могу посматрати и читати и као засебна целина. Ово је посебно важно јер области обрађене у овом делу представљају области које се предају у оквиру курса Преношење топлоте и супстанције – нумерички приступ, на докторским студијама на Машинском факултету Универзитета у Београду.*

*Поред првог прилога који се бави успостављањем основних билансних једначина и последицама њиховог “Рејнолдсовог осредњавања” у другом прилогу је дат детаљан приказ моделирања свих чланова у једначинама пуног шестоједначинског напонског модела турбуленције. Такође, приказан је и општи поступак моделирања чланова “затварајуће” билансне једначине преношења дисипације турбулентне кинетичке енергије. У последња два прилога представљени су по четири “стандардна” двоједначинска и три “стандардна” пуна напонска медела турбуленције, а који су као основа за нумеричака истраживања процеса који се остварују при удару турбулентног млаза у равну плочу.*

## **Захвалност**

*Аутор се захваљује Министарству просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије које финасира пројекте по Програму истраживања научног и технолошког развоја Републике Србије ТР 33018 и ТР 33047, а чији резултат истраживања представља и ова монографија.*

*У Београду,  
24. фебруара 2014. године*

*Аутор*



# Садржај

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Увод.....</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Физичка структура флуидног млаза.....</b>  | <b>7</b>  |
| 2.1      | Слободан млаз.....  | 7         |
| 2.2      | Удар млаза у равну плочу.....   | 9         |
| <b>3</b> | <b>Критеријалне једначине и експериментална истраживања .....</b>                               | <b>15</b> |
| 3.1      | Емпиријски изрази и експериментална истраживања поља брзина при удару млаза у равну плочу ..... | 16        |
| 3.2      | Критеријалне једначине и експериментална истраживања прелажења топлоте са плоче на флуид.....   | 19        |
| 3.3      | Приказ и анализа репрезентативних експерименталних резултата.....                               | 29        |
| 3.3.1    | Мерење локалних вредности Нуселтовог броја .....  | 29        |
| 3.3.2    | Мерење брзинских обележја флуидног тока.....  | 31        |
| <b>4</b> | <b>Нумеричке симулације струјног и температурног поља .....</b>                                 | <b>43</b> |
| 4.1      | Нумеричке симулације изведене са двоједначинским моделима турбулентних напона.....              | 43        |
| 4.2      | Нумеричке симулације струјног и температурног поља изведене са напонским моделима .....         | 50        |
| 4.2.1    | Претходна нумеричка истраживања .....   | 50        |
| 4.2.2    | Анализа резултата .....   | 57        |
| 4.2.3    | Приказ резултата нумеричких симулација изведених QIM2 напонским моделом.....                    | 83        |
| <b>5</b> | <b>Завршна анализа.....</b>   | <b>90</b> |
|          | <b>Литература .....</b>   | <b>94</b> |

## ПРИЛОГ 1

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| <b>П1</b> | <b>Билансне једначине.....</b>  | <b>103</b> |
| П1.1      | Основне билансне једначине .....  | 103        |
| П1.1.1    | Једначина континуитета, Навје-Стоксова ( <i>Navier-Stokes</i> ), Први закон термодинамике .....           | 103        |
| П1.1.2    | Рејнолдсово ( <i>Osborne Reynolds</i> ) осредњавање.....  | 107        |
| П1.1.3    | Осредњена једначина континуитета, Рејнолдсове једначине и осредњена једначина енергетског биланса .....   | 108        |
| П1.1.4    | Основне билансне једначине прилагођен нумеричкој механици нестишљивог флуида – диференцијални облик ..... | 111        |

|                 |   |            |
|-----------------|---|------------|
| П1.2            | Једначине преношења или специјални облици основних билансних једначина .....  | 113        |
| П1.2.1          | Диференцијална билансна једначина Рејнолдсових напона ...   | 113        |
| П1.2.2          | Диференцијална једначина преношења кинетичке енергије турбуленције (кинетичке енергије турбулентних флукуација) .....                                   | 116        |
| П1.2.3          | Једначина преношења квадрата флукуационе (турбулентне) вртложности $\overline{\omega_i \omega_i}$ .....   | 118        |
| П1.2.4          | Билансна једначина дисипације кинетичке енергије турбуленције .....   | 120        |
| <b>ПРИЛОГ 2</b> |   |            |
| <b>П2</b>       | <b>Моделирање турбулентних напона - моделирање турбуленције.....</b>  | <b>123</b> |
| П2.1            | Општи напонски модел .....  | 124        |
| П2.1.1          | Модел члана који описује преношење Рејнолдсових напона флукуацијама брзине – члан $\mathcal{D}_{\tau,ij}^u$ .....                                       | 124        |
| П2.1.2          | Модел члана који описује преношење Рејнолдсових напона флукуацијама притиска – члан $\mathcal{D}_{\tau,ij}^p$ .....                                     | 127        |
| П2.1.3          | Модел члана који описује вискозно разлагање турбулентних напона - члан $\mathcal{E}_{\tau,ij}$ .....  | 127        |
| П2.1.4          | Модел члана који описује прераспodelу турбулентних напона $\mathcal{R}_{\tau,ij}$ .....   | 129        |
| П2.1.5          | Утицај присуства чврстог тела у флуидном току на члан прераспodelе Рејнолдсових напона или ефекат еха притиска .....                                    | 137        |
| П2.1.6          | Стандардни облик моделиране једначине Рејнолдсових напона за струјања при великим Рејнолдсовим турбулентним бројевима .....                             | 140        |
| П2.1.7          | Стандардни облик моделиране једначине Рејнолдсових напона за струјања при малим Рејнолдсовим турбулентним бројевима .....                               | 141        |
| П2.2            | Затварајуће апроксимације или моделирање чланова једначине преношења дисипације (разлагања) кинетичке енергије турбуленције .....                       | 142        |
| П2.2.1          | Моделирање члана турбулентне дифузије $\varepsilon$ настале дејством флукуација брзине $\mathcal{D}_\varepsilon^u$ .....                                | 142        |
| П2.2.2          | Моделирање члана турбулентне дифузије дисипације кинетичке енергије турбуленције настале дејством флукуација притиска $\mathcal{D}_\varepsilon^p$ ..... | 144        |
| П2.2.4          | Моделирање члана молекуларне дифузије дисипације кинетичке енергије турбуленције $\mathcal{D}_\varepsilon^v$ .....                                      | 144        |



|        |   |     |
|--------|---|-----|
| П2.2.5 | Моделирање чланова стварања $\mathcal{P}_\varepsilon$ и разлагања $\mathcal{E}_\varepsilon$ дисипације кинетичке енергије турбуленције .....                | 145 |
| П2.2.6 | Стандардни облик моделиране једначине дисипације кинетичке енергије турбуленције за струјања са великим Рејнолдсовим турбулентним бројевима .....           | 146 |
| П2.3   | Моделирање једначине дисипације кинетичке енергије турбуленције за струјања у којима се појављују и зоне са малим Рејнолдсовим турбулентним бројевима ..... | 147 |
| П2.2.3 | Члан стварања $\varepsilon$ услед деформације главног тока $\mathcal{P}_\varepsilon^U$ .....  | 148 |
| П2.2.3 | Члан стварања $\varepsilon$ услед неуниформности поља осредњене вртложности $\mathcal{P}_\varepsilon^\Omega$ .....  | 150 |
| П2.2.3 | Стандардни облик моделиране једначине дисипације кинетичке енергије турбуленције за струјања са малим Рејнолдсовим турбулентним бројевима .....             | 151 |

### ПРИЛОГ 3

#### П3 Основни двоједначински модели турбулентних напона за мале

|  |     |
|--|-----|
| Рејнолдсове турбулентне бројеве .....  | 152 |
| П3.1 Основне билансне једначине .....  | 153 |
| П3.2 Основни $k - \varepsilon$ модел турбулентних напона за мале Рејнолдсове турбулентне бројеве .....         | 155 |
| П3.3 Основни $k - \omega$ модел турбулентних напона за мале Рејнолдсове турбулентне бројеве .....              | 155 |
| П3.4 Лам-Бремхорстов $k - \varepsilon$ модел турбулентних напона за мале Рејнолдсове турбулентне бројеве ..... | 157 |
| П3.5 Чен-Кимов $k - \varepsilon$ модел турбулентних напона за мале Рејнолдсове турбулентне бројеве .....       | 158 |

### ПРИЛОГ 4

#### П4 Напонски модели за велике Рејнолдсове турбулентне бројеве .....

|  |     |
|--|-----|
| П4.1 Основне билансне једначине .....  | 160 |
| П4.2 Квази-изотропни напонски модел (члана нагле прерасподеле турбулентних напона) - <i>Quasi-Isotropic Model</i> (QIM) .....                          | 161 |
| П4.3 Напонски модел изотропизације стварања I (члана нагле прерасподеле турбулентних напона) - <i>Isotropisation of Production Model</i> (IPY) .....   | 163 |
| П4.4 Напонски модел изотропизације стварања II (наглог члана прерасподеле турбулентних напона) - <i>Isotropisation of Production Model</i> (IPM) ..... | 163 |

|                  |     |
|------------------|-----|
| Литература ..... | 165 |
|------------------|-----|