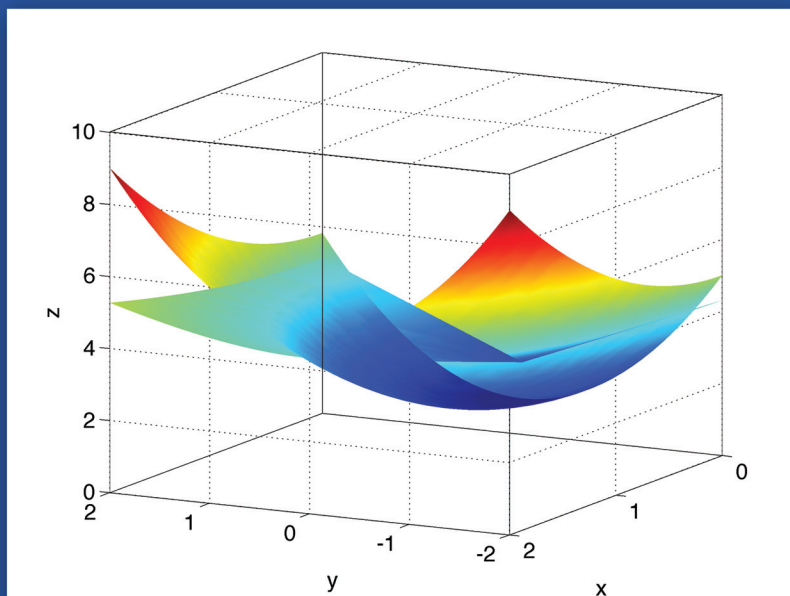


Miodrag M. Spalević  
Aleksandar S. Cvetković  
Ivan D. Arandelović

Aleksandar V. Pejčev  
Dušan Lj. Đukić  
Jelena D. Tomanović

# VIŠESTRUKI, KRIVOLINIJSKI I POVRŠINSKI INTEGRALI I PRIMENE, TEORIJA REDOVA



Mašinski fakultet  
Beograd, 2015.

# VIŠESTRUKI, KRIVOLINIJSKI I POVRŠINSKI INTEGRALI I PRIMENE, TEORIJA REDOVA

prof. dr Miodrag M. Spalević  
prof. dr Aleksandar S. Cvetković  
prof. dr Ivan D. Arandjelović  
dr Aleksandar V. Pejčev  
Dušan Lj. Djukić  
Jelena D. Tomanović

Univerzitet u Beogradu  
Mašinski fakultet  
Katedra za Matematiku  
Beograd, 2015. godine

Dr Miodrag M. Spalević, redovni profesor  
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Dr Aleksandar S. Cvetković, redovni profesor  
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Dr Ivan D. Arandjelović, vanredni profesor  
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Dr Aleksandar V. Pejčev, docent  
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Dušan Lj. Djukić, asistent  
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Jelena D. Tomanović, asistent  
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

## **Višestruki, krivolinijski i površinski integrali i primene, teorija redova** *Osnovni udžbenik*

I izdanje

Recenzenti:

Dr Stojan Radenović, redovni profesor (u penziji)  
Mašinski fakultet, Univerzitet u Beogradu

Dr Djordje Krtinić, docent  
Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

Izdavač:

Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet  
Kraljice Marije 16, 11120 Beograd 35, Srbija  
Za izdavača:

Dekan dr Radivoje Mitrović, redovni profesor  
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Glavni i odgovorni urednik:

Dr Vladimir Buljak, docent  
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Odobreno za štampu:

Odlukom Dekana Mašinskog fakulteta, br. odluke 26/2015 od 27.10.2015. godine

Beograd 2015. godine

Tiraž: 800 primeraka

Štampa: Planeta print  
ISBN 978-86-7083-885-7

---

Preštampavanje, umnožavanje, fotokopiranje  
ili reprodukcija cele knjige ili nekih njenih delova nije dozvoljeno

# Predgovor

Knjiga **Višestruki, krivolinijski i površinski integrali i primene, teorija redova** je namenjena studentima 2. i 3. godine Mašinskog fakulteta u Beogradu. Skoro cela materija knjige se odnosi na predmet Matematika 3, koji studenti Mašinskog fakulteta u Beogradu slušaju u 3. semestru osnovnih akademskih studija. Jedino se materija iz teorije redova, koja je dodata na kraju knjige, obrađuje u okviru predmeta Numeričke metode, koji se sluša u 5. semestru osnovnih akademskih studija. Iako to nije predviđeno planom i programom ova dva predmeta, u okviru teorije redova obrađeni su ukratko i Furijeovi redovi. Naravno, knjiga može biti od koristi ne samo studentima Mašinskog fakulteta u Beogradu već i drugima koji se interesuju za ovu problematiku.

Na kraju svakog poglavlja postoje odeljci u kojima su dati zadaci sa rešenjima, a odnose se na problematiku koja se obrađuje u datom poglavlju.

Posebnu zahvalnost dugujemo kolegi Dušanu Georgijeviću, prof. matematike u penziji Mašinskog fakulteta u Beogradu, na delu materijala koji je ugradjen u ovu knjigu. Autori će biti zahvalni svima koji ukažu na eventualne greške, kako bismo iste otklonili u narednom izdanju knjige.

Beograd, 1.11.2015. godine

Autori



# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Skalarna i vektorska polja</b>	<b>1</b>
1.1	Ekviskalarne površi skalarnog polja . . . . .	1
1.2	Gradijent skalarnog polja . . . . .	2
1.3	Izvod skalarnog polja u datom smeru . . . . .	3
1.4	Vektorske linije vektorskog polja . . . . .	3
1.5	Divergencija i rotor vektorskog polja . . . . .	4
1.6	Rešeni zadaci iz skalarnih i vektorskih polja . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Krivolinijski integrali</b>	<b>25</b>
2.1	Egzistencija . . . . .	28
2.2	Svojstva . . . . .	28
2.3	Izračunavanje . . . . .	29
2.4	Veza između krivolinijskih integrala prve i druge vrste . . . . .	30
2.5	Primene krivolinijskih integrala . . . . .	30
2.6	Rad vektorskog polja . . . . .	31
2.7	Rešeni zadaci iz krivolinijskih integrala . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Dvostruki integral</b>	<b>53</b>
3.1	Egzistencija . . . . .	54
3.2	Svojstva . . . . .	55
3.3	Izračunavanje . . . . .	55
3.4	Smena promenljivih kod dvostrukog integrala . . . . .	56
3.5	Kubatura pomoću dvostrukog integrala . . . . .	57
3.6	Komplanacija pomoću dvostrukog integrala . . . . .	58
3.7	Grinova integralna teorema . . . . .	60
3.7.1	Nezavisnost krivolinijskog integrala od oblika putanje integracije u ravni . . . . .	61
3.8	Rešeni zadaci iz dvostrukog integrala . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Trostruki integral</b>	<b>97</b>
4.1	Egzistencija . . . . .	98
4.2	Svojstva . . . . .	99
4.3	Izračunavanje . . . . .	99
4.4	Smena promenljivih kod trostrukog integrala . . . . .	101
4.5	Nesvojstveni dvostruki i trostruki integrali . . . . .	102
4.6	Rešeni zadaci iz trostrukog integrala . . . . .	105

<b>5</b>	<b>Površinski integrali</b>	<b>119</b>
5.1	Orijentacija površi . . . . .	119
5.2	Definicije površinskih integrala . . . . .	121
5.3	Egzistencija . . . . .	124
5.4	Svojstva . . . . .	125
5.5	Izračunavanje . . . . .	126
5.6	Veza između površinskih integrala . . . . .	127
5.7	Detaljnije o izračunavanju površinskog integrala . . . . .	128
5.8	Protok vektorskog polja . . . . .	132
5.9	Rešeni zadaci iz površinskih integrala . . . . .	132
<b>6</b>	<b>Integralne formule Stoksa i Ostrogradskog</b>	<b>153</b>
6.1	Stoksova integralna formula . . . . .	153
6.2	Integralna formula Gausa i Ostrogradskog . . . . .	154
6.3	Nezavisnost krivolinijskog integrala od putanje . . . . .	155
6.4	Klasifikacija vektorskih polja . . . . .	156
6.5	Rešeni zadaci iz int. formula i klasifikacije polja . . . . .	157
<b>7</b>	<b>Redovi</b>	<b>181</b>
7.1	Brojni redovi . . . . .	181
7.1.1	Osobine beskonačnih brojnih redova . . . . .	182
7.1.2	Konvergencija redova sa pozitivnim članovima . . . . .	184
7.1.3	Alternativni (naizmenični) redovi . . . . .	189
7.1.4	Apsolutno konvergentni redovi . . . . .	191
7.1.5	Beskonačni proizvod . . . . .	192
7.2	Funkcionalni redovi . . . . .	194
7.2.1	Uniformna konvergencija . . . . .	195
7.2.2	Stepeni redovi . . . . .	198
7.2.3	Predstavljanje funkcije preko stepenih redova . . . . .	203
7.3	Furijeovi redovi . . . . .	205
7.3.1	Furijeov red parne i neparne funkcije . . . . .	210
7.3.2	Furijeov red funkcije sa proizvoljnim periodom . . . . .	211
7.3.3	Razvijanje funkcija definisanih na datom intervalu u red sinusa i kosinusa . . . . .	213
7.4	Rešeni zadaci iz teorije redova . . . . .	217

# Slike

1.1	Nivo linije. . . . .	2
2.1	$\Pi$ podela krive $C$ . . . . .	26
2.2	Ilustracija izračunavanja površine cilindrične površi. . . . .	31
2.3	Primer površi $D$ u ravni, koja je oivičena zatvorenom krivom $C$ , čiju površinu računamo pomoću krivolinijskog integrala druge vrste datom formulom. . . . .	32
2.4	Slika uz rešenje zadatka 2.1. . . . .	34
2.5	Slika uz rešenje zadatka 2.2. . . . .	35
2.6	Slika uz rešenje zadatka 2.3. . . . .	36
2.7	Slika uz rešenje zadatka 2.4. . . . .	37
2.8	Slika uz rešenje zadatka 2.7. . . . .	40
2.9	Slika uz rešenje zadatka 2.8. . . . .	41
2.10	Slika uz rešenje zadatka 2.10. . . . .	44
2.11	Slika uz rešenje zadatka 2.11. . . . .	45
2.12	Slika uz rešenje zadatka 2.17. . . . .	50
2.13	Slika uz rešenje zadatka 2.19. . . . .	51
3.1	Podela oblasti $G$ . . . . .	54
3.2	Uz teoremu o izračunavanju dvostrukog integrala, gde je kriva $q_1$ zadana funkcijom $y = \varphi_1(x)$ a kriva $q_2$ funkcijom $y = \varphi_2(x)$ , na nekom intervalu $[a, b]$ . . . . .	56
3.3	Kubatura pomoću dvostrukog integrala, gde je površ $q_2$ zadana funkcijom $z = \varphi_1(x, y)$ a površ $q_1$ funkcijom $z = \varphi_2(x, y)$ , na nekoj oblasti $G$ . . . . .	58
3.4	Oblast $G$ oivičena krivom $C = C_1 \cup C_2$ . . . . .	61
3.5	Slika uz rešenje zadatka 3.1. . . . .	64
3.6	Slika uz rešenje zadatka 3.2. . . . .	65
3.7	Slika uz rešenje zadatka 3.3. . . . .	67
3.8	Slika uz rešenje zadatka 3.5. . . . .	68
3.9	Slika uz rešenje zadatka 3.8. . . . .	72
3.10	Slika uz rešenje zadatka 3.15. . . . .	78
3.11	Slika uz rešenje zadatka 3.16. . . . .	79
3.12	Slika uz rešenje zadatka 3.17. . . . .	81
3.13	Slika uz rešenje zadatka 3.18. . . . .	82
4.1	Podela tela. . . . .	98



4.2	Ilustracija preslikavanja oblasti $D$ u $O_{uvw}$ prostoru u oblast $T$ prostora $O_{xyz}$ .	101
4.3	Veza između Dekartovih i cilindričnih koordinata.	103
4.4	Veza između Dekartovih i sfernih koordinata.	104
4.5	Slika uz rešenje zadatka 4.2.	106
4.6	Slika uz rešenje zadatka 4.4.	108
4.7	Uz rešenje zadatka 4.16.	117
5.1	Strane površi zadate eksplicitno $z = f(x, y)$ .	120
5.2	Mebijusova traka.	121
5.3	$\Pi$ podela na glatkoj površi.	123
5.4	Ilustracija površi iz zadatka 5.10.	141
6.1	Ilustracija pozitivne orijentacije površi $\Gamma$ i krive $C$ koja se nalazi na rubu površi.	154
6.2	Zatvorena površ $\Gamma$ i spoljašnja normala.	155
6.3	Slika uz rešenje zadatka 6.2.	160
6.4	Slika uz rešenje zadatka 6.4.	164
6.5	Slika uz rešenje zadatka 6.7.	168
7.1	Ilustracija Košijevog integralnog kriterijuma.	190
7.2	Ilustracija uniformne konvergencije na intervalu $[0, 1]$ uz $\varepsilon = .2$ .	196
7.3	Ilustracija konvergencije Furijeovog reda (7.10).	209
7.4	Ilustracija konvergencije Furijeovog reda (7.11).	212
7.5	Ilustracija osobina integrala periodične funkcije.	214
7.6	Konvergencija Furijeovog reda (7.12).	215
7.7	Konvergencija Furijeovog reda (7.13).	216
7.8	Konvergencija Furijeovog reda (7.14).	217