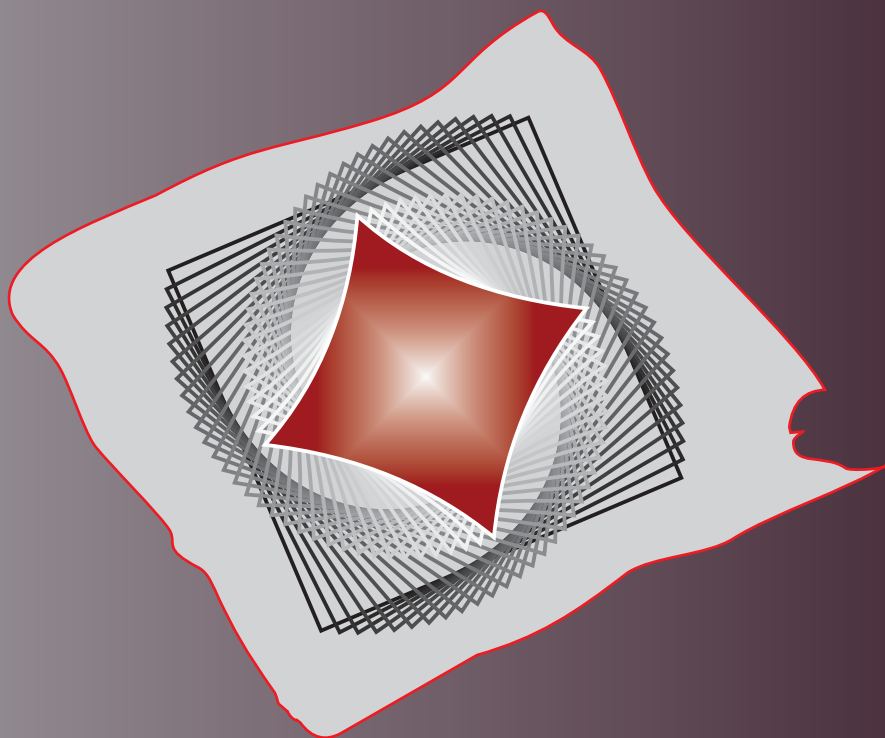


DINAMIKA  
SINGULARNIH I DESKRIPTIVNIH  
SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

*Ivan M. Buzurović  
Dragutin Lj. Debeljković*





Dr Ivan M. Buzurović • Dr Dragutin Lj. Debeljković

---

**DINAMIKA  
SINGULARNIH I DESKRIPTIVNIH  
SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA  
Stabilnost, robusnost, optimizacija,  
stabilizacija i robusna stabilizacija**

**Dynamics of Singular and Descriptive  
Feedback Control Systems**

**Stability, robustness, optimization,  
stabilizability and robustness stabilizability**

*Mašinski fakultet  
Univerziteta u Beogradu  
2015*

Dr **Ivan M. Buzurovic**,  
Division of Physics and Biophysics,  
Harvard Medical School, Harvard University,  
Boston, MA, USA

Dr **Dragutin Lj. Debeljković**, redovni profesor  
Mašinski fakultet - Univerzitet u Beogradu

**Dinamika  
singularnih i deskriptivnih  
sistemi automatskog upravljanja**

**Dynamics of  
singular and descriptive  
feedback control systems**

Monografija  
*Monograph*

I izdanje

*Recenzenti*

Dr Svetislav Zarić, redovni profesor  
Mašinskog fakulteta u Beogradu

Dr Mihailo P. Lazarević, redovni profesor  
Mašinskog fakulteta u Beogradu

*Izdavač*

Univerzitet u Beogradu  
Mašinski fakultet Beograd  
11000 Beograd, Kraljice Marije 16

*Za izdavača*

Dr Aleksandar Obradović, prof.

*Odobreno za štampu*  
odlukom *Dekana* br. **284/14 od 02.10.2014.**

Beograd, **2015**  
Tiraž: 200 primeraka

*Štampa PLANETA print*

ISBN 978 – 86 – 7083– 843– 7

---

*Preštampavanje, umnožavanje, fotokopiranje  
ili reprodukcija cele knjige ili nekih njenih delova nije dozvoljena*

**Dr Ivan M. Buzurović · Dr Dragutin Lj. Debeljković**

**DINAMIKA  
SINGULARNIH I DESKRIPTIVNIH  
SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA**

**Stabilnost, robusnost, optimizacija,  
stabilizacija i robusna stabilizacija**

**DYNAMICS  
OF SINGULAR AND DESCRIPTIVE  
FEEDBACK CONTROL SYSTEMS  
STABILITY, ROBUSTNESS, OPTIMIZATION,  
STABILIZABILITY AND ROBUSTNESS STABILIZABILITY**

## **Zahvalnost**

*Izdanje ove  
naučne monografije  
finansijski je pomoglo*

**Ministarstvo za prosvetu, nauku,  
i tehnološki razvoj Republike Srbije**

*na čemu su Ministarstvu autori neizmerno i duboko zahvalni.*

## ***PREDGOVOR***

Već više od dve pune decenije *singularni* (deskriptivni) sistemi privlače pažnju naučne i stručne javnosti širom sveta.

Njihovo prisustvo u svim granama tehnike i u pojedinim oblastima društvenih nauka više je nego evidentno, što obavezuje da im se sa svih mogućih aspekata proučavanja posveti dužna pažnja.

U matematičkom smislu ovi sistemi su predstavljeni kombinacijom diferencijalnih (diferencnih) i algebarskih jednačina, pri čemu ove druge predstavljaju ograničenje koje treba zadovoljiti pri rešavanju onih prvih.

Imajući to u vidu, sasvim je jasno da je odgovarajuće poznavanje linearne algebre i teorije sistema neophodno za razumevanje i adekvatno tumačenje dobijenih rezultata.

Polazeći od osnovnih osobina ovih klasa sistema, u žiži interesovanja bila su pitanja optimizacije, robusnosti i stabilizacije.

U tom smislu dosta prostora bilo je posvećeno  $H_\infty$  i  $H_2$  optimizaciji kao jednom od savremenih problema koji snažno zaokupljuje interesovanje brojnih naučnika i stručnjaka.

Tu se našlo i prostora za diskusiju različitih pod-optimalnih rešenja uključujući i metodu projekcijskih upravljanja.

Kada je u pitanju robusnost, izneti su mnogi značajni rezultati vezani za ovu važnu osobinu sistema objavljeni u nekoliko poslednjih godina, posebno vezanih za osobinu robusnosti stabilnosti sistema.

Stabilizacija ove klase sistema razmatrana je sa dva stanovišta.

Sa stanovišta klasičnog prilaza projektujući odgovarajuće uskladnike ili kompenzatore ili polazeći od dobro poznatih metoda podešavanja polova, pri čemu se u oba slučaja dolazi do traženih rešenja uvek dolazi uz izvesna ograničenja koja manje više potiču ili od prirode samih sistema ili izabranih metoda projektovanja, prvenstveno vezano za domen u kome se sinteza i projektovanje obavljaju.

Sa stanovišta dinamike, ovde izučavanih klasa sistema, bila su pitanja njihove stabilnosti ispitivana sa stanovišta primene LMI postupaka, što predstavlja permanentnu preokupaciju i interesovanje oba autora.

Uvažavajući savremene trendove u naučnoj literaturi, već klasična pitanja stabilnosti ove klase sistema, praćena su i odgovarajućim rezultatima vezanim za ispitivanje njihove robusnosti u prisustvu strukturnih i nestrukturnih perturbacija kao i nedavno nastalim metodama za optimizaciju i podešavanje polova kojima se ilistabilišu ili robusno stabilišu razmatrani sistemi.

Nešto manje prostora, bilo je posvećeno projektovanju savremenih observera, neophodnih u svim prilikama kada se raspolože sa oskudnom informacijom o sistemu a kada je evidentna potreba da se njime upravlja.

Ove problematika je bila razmatrana samo za klasu vremenski kontinualnih singularnih sistema.

Ova, kao i nekoliko prethodnih monografija autora, podržava i nastavlja da prezentuje aktuelne trendove u ovaj oblasti i predstavlja uobličen, rafiniran, selektivan i prilagođen tekst. delom, preuzet iz savremenih radova objavljenih u renomiranim međunarodnim časopisima najvišeg ranga a i monografija koje se bave opštim pitanjima problema optimizacije, stabilnosti, robusnosti stabilnosti, stabilizacije i robusne stabilizacije ove klase sistema automatskog upravljanja.

Već duži niz godina postoji nasušna potreba, da se na ovdašnjim i sadašnjim naučnim prostorima, pojavi jedno ovakvo štivo koje bi, sa prethodnim izdanjima, zainteresovanim čitaocima pružilo dovoljno početnih znanja i ohrabrenja da se bez straha i bojazni mogu upustiti u dalju spoznaju ove veoma složene problematike a što je i bila glavna preokupacija autora bez ikakvih pretenzija da se, u ovom trenutku, ponudi i nešto više.

Dr *Svetislavu Zariću* i Dr *Mihailu P. Lazareviću*, redovnim profesorima Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu autori su duboko zahvalni na korisnim sugestijama i trudu oko recenzije.

Beograd, januar 2015. god.

***Autori***



**DINAMIKA  
SINGULARNIH I DESKRIPTIVNIH  
SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA**

**DYNAMICS OF  
SINGULAR AND DESCRIPTIVE  
FEEDBACK CONTROL SYSTEMS**



# *SADRŽAJ*

## *KONTINUALNI SINGULARNI SISTEMI*

### *OPŠTA RAZMATRANJA*

#### **I OSOBINE I SPECIFIČNOSTI**

#### **KONTINUALNIH SINGULARNIH SISTEMA ..... 1**

#### **1. UVODNA RAZMATRANJA ..... 1**

#### **2. NASTANAK I KRAĆI PREGLED REZULTATA POSTIGNUTIH NA POLJU PROUČAVANJA SINGULARNIH SISTEMA ..... 4**

#### **3. PRIRODA I OSOBENOSTI SINGULARNIH SISTEMA ..... 5**

#### **4. KLASIFIKACIJA I PODELA SINGULARNIH SISTEMA ..... 6**

#### **5. DINAMIČKO PONAŠANJE SINGULARNIH SISTEMA ..... 8**

#### **6. PRIMERI I RAZLOZI POJAVLJIVANJA SINGULARNIH SISTEMA ..... 8**

#### **7. REŠLJIVOST LINEARNOG SINGULARNOG SISTEMA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA ..... 10**

#### **8. KONZISTENTNI POČETNI USLOVI ..... 17**

---

<b>9. PRENOSNA FUNKCIJA I IMPULSNO PONAŠANJE SINGULARNOG SISTEMA .....</b>	<b>20</b>
<b>9.1 Prenosna funkcija .....</b>	<b>20</b>
<b>9.2 Impulsno ponašanje .....</b>	<b>22</b>
Literatura .....	30
<b>10. SINHRONIZACIJA HAOSA JEDNOG HEMIJSKOG SINGULARNOG MATEMATIČKOG WILLAMOWSKI-ROSSLER PROCESA .....</b>	<b>33</b>
<b>10.1 Uvod .....</b>	<b>33</b>
<b>10.2 Konstrukcija diferencijalnih algebarskih     jednačina za nepromenljive egzotermne reakcije .....</b>	<b>34</b>
<b>10.3 Analiza stabilnosti (DAE)s .....</b>	<b>37</b>
<b>10.4 Sinhronizacija haosa (DAE)s .....</b>	<b>40</b>
Literatura .....	45

## *KONTINUALNI SINGULARNI SISTEMI*

### KLASIČNA OPTIMIZACIJA – LQR PROBLEM

<b>II KLASIČNI POSTUPCI OPTIMIZACIJE LINEARNIH SISTEMA .....</b>	<b>47</b>
<b>11. OSNOVNE POSTAVKE OPTIMIZACIJE .....</b>	<b>47</b>
<b>11.1 Opšta pitanja i zadaci optimizacije sistema .....</b>	<b>47</b>
11.1.1 Preliminarna razmatranja .....	48
11.1.2 Klasa razmatranih sistema .....	49
11.1.3 Analiza kriterijuma optimalnosti .....	50
<b>11.2 Pitanja ograničenja     u zadacima optimizacije .....</b>	<b>52</b>
<b>11.3 Parametarska optimizacija u prostoru stanja .....</b>	<b>52</b>
<b>11.4 Kalmanov (LQR) regulator .....</b>	<b>55</b>

---

<b>11.5 LQR problem – Kalmanov regulator</b> .....	60
11.5.1 Fizička motivacija za LQR .....	62
11.5.2 Ograničenja LQR upravljačkih sistema .....	63
11.5.3 Osobine LQR upravljačkih sistema i srodnih tehnika .....	64
<b>11.6 Linearni kvadratni gausovski regulator</b> <b>    i <math>H_2</math> optimalno upravljanje</b> .....	65
<b>11.7 Min–max problem</b> <b>    i <math>H_\infty</math> upravljanje sa povratnom spregom po stanju</b> .....	68
<b>11.8 Osnovne postavke <math>H_2</math> i <math>H_\infty</math> upravljanja</b> .....	71
Literatura .....	74
<b>12.OPTIMALNI KALMANOV (LQR) REGULATOR ZA</b> <b>VREMENSKI KONTINUALNE SINGULARNE SISTEME:</b> <b>PRISTUP PREKO DINAMIČKOG PROGRAMIRANJA</b> .....	75
<b>12.1 Uvod</b> .....	75
<b>12.2 Preliminarni rezultati</b> .....	76
<b>12.3 Linearni–kvadratni (LQ) problem</b> .....	78
<b>12.4 Problem beskonačnog vremenskog intervala</b> .....	84
Literatura .....	87
<b>13. STABILNOST</b> <b>I OPTIMALNO UPRAVLJANJE</b> <b>NELINEARNIH SINGULARNIH SISTEMA</b> .....	89
<b>13.1 Uvod</b> .....	89
<b>13.2 Iskaz problema</b> .....	90
<b>13.3 Opis sistema</b> .....	91
<b>13.4 Kauzalnost</b> .....	94
<b>13.5 Stabilnost</b> .....	96
13.5.1 Opšta teorija .....	96
13.5.2 Thomson–Tait–Chetaev teorema .....	99
<b>13.6 Optimalno upravljanje</b> .....	101
13.6.1 Opšta teorija .....	101
<b>13.7 Ilustrativni primeri</b> .....	103
13.7.1 Kauzalni mehanički singularni sistem .....	103
13.7.2 Nekauzalni mehanički singularni sistem .....	105
13.7.3 Nekauzalni školski primer .....	105
Literatura .....	109

---

<b>14. SINGULARNI (LQ) PROBLEM ZA IREGULARNE SINGULARNE SISTEME</b> .....	111
<b>14.1 Uvod</b> .....	111
<b>14.2 Postavka i transformacija problema</b> .....	112
<b>14.3 Rešenje problema</b> .....	119
<b>14.4 Numerički primer</b> .....	126
Literatura .....	128

# *KONTINUALNI SINGULARNI SISTEMI*

## *$H_\infty$ OPTIMIZACIJA*

### **III TEORIJSKE OSNOVE**

<b><math>H_\infty</math> OPTIMIZACIJE LINEARNIH SISTEMA</b> .....	131
<b>15. <math>H_\infty</math> OPTIMIZACIJA VIŠESTRUKO PRENOSNIH LINEARNIH SISTEMA</b> .....	131
<b>15.1 Uvodna razmatranja</b> .....	131
15.1.1 Poremećaji .....	134
15.1.2 Greške u modeliranju .....	134
15.1.3 Povratna sprega .....	135
<b>15.2 Motivacija za koncept <math>H_\infty</math> pri analizi i sintezi robusnih sistema</b> .....	137
15.2.1 Pojam robusnosti i neizvesnosti .....	139
15.2.2 Nestrukturirane greške .....	140
15.2.3 Parametarske greške .....	144
15.2.4 Linearna frakciona transformacija .....	144
15.2.5 Stabilizirajući regulator .....	150
15.2.6 Teorema malih pojačanja .....	154
15.2.7 Robusne performanse .....	157
<b>15.3 Moguće primene <math>H_\infty</math> optimizacije sistema</b> .....	159
Literatura .....	160

---

<b>16. OSNOVNE POSTAVKE <math>H_\infty</math> OPTIMIZACIJE</b> .....	161
<b>16.1 Matematičke osnove <math>H_\infty</math> optimalnih sistema</b> .....	161
16.1.1 Osetljivost .....	161
16.1.2 Veza sa konceptom robusnosti .....	164
16.1.3 Opšti model perturbacije .....	167
16.1.4 Perturbacije brojioca i imenioca .....	171
<b>16.2 Problem mešovite osetljivosti</b> .....	176
16.2.1 Oblikovanje frekventne karakteristike otvorenog kola .....	177
16.2.2 Standardni problem $H_\infty$ optimalnog regulatora .....	179
16.2.3 Rešenje standardnog problema u frekventnom domenu .....	181
<b>16.3 Rešenje problema</b>	
<b>u prostoru stanja – savremen pristup</b> .....	186
16.3.1 Rešenje $H_\infty$ optimalnog regulatora	
u povratnoj grani po stanju .....	188
16.3.2 Problem optimalne $H_\infty$ estimacije .....	192
16.3.3 Rešenje $H_\infty$ optimalnog regulatora	
u povratnoj sprezi sistema po izlazu .....	194
Literatura .....	199
<b>17. SLABLJENJE UTICAJA</b>	
<b>POREMEĆAJA I <math>H_\infty</math> OPTIMIZACIJA:</b>	
<b>METODA PROJEKTOVANJA ZASNOVANA</b>	
<b>NA ALGEBARSKOJ RICCATI-JEVOJ JEDNAČINI</b> .....	201
<b>17.1 Uvod</b> .....	201
<b>17.2 Sistem i definicije</b> .....	202
<b>17.3 Glavni rezultat</b> .....	204
Literatura .....	209
<b>18. <math>H_\infty</math> KONTOLER BEZ MEMORIJE</b>	
<b>ZA SISTEME SA KAŠNJENJEM</b> .....	211
<b>18.1 Uvod</b> .....	211
<b>18.2 Glavni rezultat</b> .....	211
<b>18.3 Numerički primer</b> .....	217
Literatura .....	218

---

<b>19. <math>H_\infty</math> UPRAVLJANJE ZA SINGULARNE SISTEME:</b>	
<b>PRISTUP PREKO MATRIČNIH NEJEDNAKOSTI</b> .....	219
<b>19.1 Uvod</b> .....	219
<b>19.2 Matrične nejednakosti za singularne sisteme</b> .....	220
<b>19.3 Glavni rezultat</b> .....	224
Literatura .....	234
<b>20. <math>H_2</math> ALGEBARSKA RIKATIJEVA JEDNAČINA</b>	
<b>ZA LINEARNE SINGULARNE SISTEME</b> .....	237
<b>20.1 Opis sistema i preliminarni rezultati</b> .....	238
<b>20.2 Hamiltonova matrica</b>	
<b>i <math>H_2</math> uopštena Rikatijeva algebarska jednačina</b> .....	241
Literatura .....	252

## *KONTINUALNI SINGULARNI SISTEMI*

### SINTEZA I PROJEKTOVANJE USKLAĐNIKA

<b>IV STABILIZACIJA, USKLAĐIVANJE</b>	
<b>I METODE PODEŠAVANJA POLOVA</b> .....	253
<b>21. STABILIZACIJA SINGULARNIH SISTEMA</b> .....	253
<b>21.1 Definisane problema</b> .....	255
<b>21.2 Rešenja problema upravljanje izlaza</b>	
<b>pomoću povratne sprege sa potpunom informacijom</b> .....	258
<b>21.3 Rešenja problema upravljanja izlaznim</b>	
<b>veličinama pomoću povratne sprege po grešci</b> .....	260
<b>21.4 Singularni sistemi koji se mogu normalizovati</b> .....	262
<b>21.5 Opšti slučaj</b> .....	265
Literatura .....	270



---

<b>22. PROJEKTOVANJE:</b>	
<b>USKLADNICI ZA LINEARNE SINGULARNE SISTEME     SA PRISUTNIM KAŠNJENJEM U IZLAZNIM VELIČINAMA ..</b>	273
22.1 Uvod .....	273
22.2 Projektovanje dinamičkog kompenzatora .....	275
22.3 Praćenje i regulisanje uticaja konstantnih poremećaja .....	280
22.4 Praćenje i slabljenje uticaja nekih nekonstantnih poremećaja .....	287
Literatura .....	295
<b>23. UPRAVLJANJE SINGULARNIH SISTEMA SA GARANTOVANIM INDEKSOM PERFORMANSE .....</b>	299
23.1 Uvod .....	299
23.2 Model upravljanja sa konceptom dinamičke povratne sprege po izlazu .....	301
23.3 Uslovi postojanja regulatora sa garantovanim indeksom performane .....	303
23.4 Sinteza regulatora koji garantuje optimalni indeks performanse .....	311
Literatura .....	313

## *KONTINUALNI SINGULARNI SISTEMI REKONSTRUKCIJA STANJA*

<b>V SAVREMENI OBSERVERI I REKONSTRUKCIJA STANJA SISTEMA .....</b>	315
<b>24. <math>H_2</math> OBSERVER ZA SINGULARNE SISTEME: PROJEKTOVANJE POMOĆU POSTUPAKA LMI .....</b>	315
24.1 Uvod .....	315
24.2 Preliminarni rezultati .....	316
24.3 Kontroler $H_2$ zasnovan na observeru .....	318
24.4 Primena (LMI) metode u projektovanju observera .....	322
24.5 Numerički primer .....	327
Literatura .....	328

---

# *DISKRETNİ DESKRIPTIVNI SISTEMI*

## **OPŠTA RAZMATRANJA**

### **VI OSOBINE I SPECIFIČNOSTI**

<b>DISKRETNIH DESKRIPTIVNIH SISTEMA .....</b>	<b>329</b>
<b>25. UVODNA RAZMATRANJA .....</b>	<b>329</b>
<b>26. REŠLJIVOST LINEARNIH SINGULARNIH DIFERENCNIH JEDNAČINA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA .....</b>	<b>331</b>
<b>27. KONZISTENTNI POČETNI USLOVI DISKRETNIH DESKRIPTIVNIH SISTEMA .....</b>	<b>336</b>
<b>28. KANONIČKE FORME LINEARNIH DISKRETNIH DESKRIPTIVNIH SISTEMA .....</b>	<b>340</b>
<b>29. ODREĐIVANJE REŠENJA SINGULARNOG SISTEMA DIFERENCNIH JEDNAČINA I KRETANJE DESKRIPTIVNOG SISTEMA U PROSTORU STANJA .....</b>	<b>347</b>
<b>29.1 Slobodni radni režim .....</b>	<b>347</b>
<b>29.2 Prinudni radni režim .....</b>	<b>349</b>
<b>29.3 Prilaz sa pozicija kanoničkih formi .....</b>	<b>351</b>
<b>30. MATRICA PRENOSNIH FUNKCIJA DISKRETNOG DESKRIPTIVNOG SISTEMA .....</b>	<b>353</b>
Literatura .....	357

---

*DISKRETNİ  
DESKRIPTIVNI SISTEMI*

**POSEBNE KLASE SISTEMA**

<b>VII IMPLICITNI DISKRETNİ SISTEMI</b> .....	359
31. OSVRT NA TEORIJU LINEARNIH IMPLICITNIH DISKRETNIH SISTEMA .....	359
31.1 Osnovne definicije i preliminarna razmatranja .....	359
31.2 Fenomen predviđanja .....	363
31.3 Osobine prihvatljivost i jedinstvenosti .....	364
31.4 Koncept traga .....	365
Literatura .....	368

*DISKRETNİ  
DESKRIPTIVNI SISTEMI*

**STABILIZACIJA,  
DOPUSTLJIVOST I ROBUSNOST**

<b>VIII STABILIZACIJA DISKRETNIH DESKRIPTIVNIH SISTEMA</b> .....	369
32. STABILIZACIJA VREMENSKI DISKRETNIH DESKRIPTIVNIH SISTEMA: LMI PRILAZ .....	369
32.1 Uvod .....	369
32.2 Preliminarna razmatranja i formulacija problema .....	370
32.3 Rezultat LMI analize .....	372
32.4 Rezultat sinteze na osnovu LMI .....	376
32.5 Određivanje kontrolera .....	379
Literatura .....	381

---

<b>33. DOPUSTIVOST DISKRETNIH DESKRIPTIVNIH SISTEMA: LMI PRILAZ</b> .....	383
33.1 Uvod .....	383
33.2 Postavka problema i preliminarna razmatranja .....	384
33.3 Glavni rezultat .....	389
33.4 Numerički primeri .....	396
Literatura .....	399
<b>34. ROBUSNOST STABILNOSTI I STABILIZACIJA LINEARNIH DISKRETNIH DESKRIPTIVNIH SISTEMA: EKVIVALENTNA KARAKTERIZACIJA</b> .....	401
34.1 Uvod .....	401
34.2 Definicije i postavka problema .....	403
34.3 Glavni rezultati .....	404
34.4 Numerički primeri .....	414
Literatura .....	415
<b>IX DODACI</b> .....	417
<b>DODATAK A – Oznake</b> .....	417
<b>DODATAK B – Izvodi iz linearne algebra i teorije matrica</b> .....	423
Literatura .....	430
<b>DODATAK C – Matematičke osnove <math>H_\infty</math> optimizacije</b> .....	431
<b>C.1 Normirani prostori. Hilbertovi prostori</b> .....	431
C.1.1 Hardy–jevi prostori .....	433
<b>C.2 Vektorske i matrice norme</b> .....	435
C.2.1 Sistemske norme .....	437
C.2.2 Izračunavanje norme u prostoru stanja .....	438
C.2.3 Hankel–ova norma i operator .....	439
Literatura .....	442
<b>DODATAK D – Neka dopunska pojašnjenja – I DEO</b> .....	443
Literatura .....	446
<b>DODATAK E – Neka dopunska pojašnjenja – II DEO</b> .....	447
Literatura .....	448
<b>DODATAK F – Neki korisni rezultati</b> .....	449