



PRAKTIKUM LABORATORIJSKIH VEŽBI IZ FIZIKE I MERENJA

- ZA STUDENTE MAŠINSKOG FAKULTETA -

Vera Pavlović

Jelena Ilić

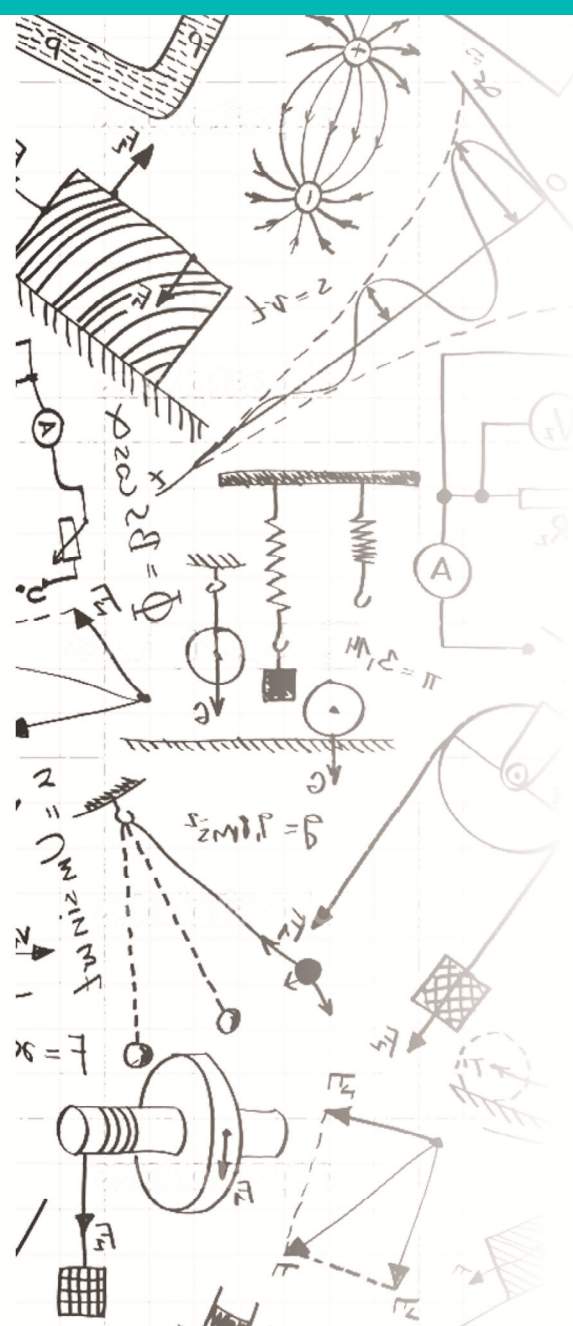
Aleksandra Vasić-Milovanović

Jasmina Jovanović

Zoran Trifković

**Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet**

Beograd, 2022.



**Vera Pavlović, Jelena Ilić, Aleksandra Vasić-Milovanović,
Jasmina Jovanović, Zoran Trifković**

**PRAKTIKUM LABORATORIJSKIH VEŽBI
IZ FIZIKE I MERENJA
- ZA STUDENTE MAŠINSKOG FAKULTETA -**

**UNIVERZITET U BEOGRADU
MAŠINSKI FAKULTET
Beograd 2022.**

Univerzitet u Beogradu – Mašinski fakultet

dr Vera Pavlović, red. prof.
dr Jelena Ilić, red. prof.
dr Aleksandra Vasić-Milovanović, red. prof.
dr Jasmina Jovanović, red. prof.
dr Zoran Trifković, red. prof

PRAKTIKUM LABORATORIJSKIH VEŽBI IZ FIZIKE I MERENJA - ZA STUDENTE MAŠINSKOG FAKULTETA - IV izdanje

Recenzenti:

dr Rajko Šašić†, red. prof., Univerzitet u Beogradu, Tehnološko-metalurški fakultet
dr Jovan Cvetić, red. prof., Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet

Izdavač:

Univerzitet u Beogradu – Mašinski fakultet
Kraljice Marije br.16, Beograd
tel. (+381 11) 3302-200
fax. (+381 11) 3370-364
www.mas.bg.ac.rs

Za izdavača:

Dekan, dr Vladimir Popović, red. prof.

Urednik:

dr Milan Lečić, red. prof.
predsednik Komisije za izdavačku delatnost
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Tiraž: 500 primeraka

Štampanje IV izdanja odobrila:
Komisija za izdavačku delatnost
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu
i Dekan Mašinskog fakulteta
Odlukom br. 11/2022 od 14. 06. 2022. godine

Štampa: PLANETA PRINT, 11000 Beograd
www.planeta-print.rs

Beograd, 2022. godine

ISBN 978-86-6060-122-5

Predgovor

Već desetak godina se na laboratorijskim vežbama u okviru predmeta *Fizika i merenja*, na prvoj godini Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, primenjuje osavremenjeni pristup obradi rezultata merenja, u skladu sa propisima koji su sadržani u međunarodnom *Uputstvu za izražavanje merne nesigurnosti (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement)*. Reč je o uputstvu prikazanom u zajedničkom izdanju vodećih organizacija unutar međunarodnog metrološkog sistema. Ovi međunarodni propisi su još 1993. god. modifikovali dotadašnje klasične metode izražavanja mernih grešaka, a nakon toga su više puta dopunjavani, odnosno precizirani publikovanjem dodatnih tekstova sa konkretnim primerima, pri čemu je i danas aktuelno izdanje ovih propisa iz 2008. godine. Iako je za studente koji su slušali predmet *Fizika i merenja* tokom prethodnih nekoliko godina bio obezbeđen određeni materijal za pripremu laboratorijskih vežbi i za sprovođenje savremene obrade rezultata merenja, ipak je ostala potreba za uobličavanjem tog materijala u jedan celoviti praktikum, odnosno pomoćni udžbenik, koji daje koncizan prikaz osnovnih postavki savremene teorije merenja, a takođe daje i prikaz primene tih postavki u konkretnim primerima laboratorijskih vežbi iz onih oblasti fizike koje se planski obrađuju na prvoj godini Mašinskog fakulteta.

Nadamo se da će ovaj praktikum istinski pomoći studentima da bolje shvate i uspešnije savladaju nove pristupe u tretiranju mernih rezultata i u izražavanju merne nesigurnosti, ne samo u okviru merenja u fizici, već i šire.

Srdačno se zahvaljujemo recenzentima na svim sugestijama, a sa interesovanjem ćemo primiti i sve kritičke primedbe čitalaca, kao i nove ideje i predloge.

Autori

SADRŽAJ

OSNOVE MERENJA I IZRAŽAVANJA REZULTATA MERENJA

• MERENJE I REZULTAT MERENJA	1
• NESIGURNOST MERENJA	1
• OSNOVE IZRAŽAVANJA NESIGURNOSTI MERENJA	2
• OSNOVNI POJMOVI U TEORIJI IDEALNOG I REALNOG MERENJA	3
• HISTOGRAM I FUNKCIJA GUSTINE VEROVATNOĆE REZULTATA MERENJA	5
• IZRAŽAVANJE SREDNJE VREDNOSTI POPULACIJE, STANDARDNE I PROŠIRENE MERNE NESIGURNOSTI POMOĆU FUNKCIJE GUSTINE VEROVATNOĆE	7
- RAVNOMERNA (PRAVOUGAONA) RASPODELA	8
- TROUGAONA RASPODELA	10
- NORMALNA (GAUSOVA) RASPODELA	11
• DIREKTNO MERENE VELIČINE I ODGOVARAJUĆA MERNNA NESIGURNOST	12
• INDIREKTNO MERENE VELIČINE I ODGOVARAJUĆA MERNNA NESIGURNOST	13
• RELATIVNI OBLICI NESIGURNOSTI	16
• FAKTOR OBUHVATA KOD INDIREKTNO MERENE VELIČINE	16
• NALAŽENJE OPTIMALNE PRAVE METODOM NAJMANJEG ZBIRA KVADRATA ODSUPANJA	19
• NESIGURNOST ODREĐIVANJA KOEFICIJENTA PRAVCA OPTIMALNE PRAVE	20
• GRAFIČKO PRIKAZIVANJE VREDNOSTI DOBIJENIH DIREKTNIM ILI INDIREKTNIM MERENJEM NEKE FIZIČKE VELIČINE	21
• MERNE JEDINICE U MEĐUNARODNOM SISTEMU JEDINICA (SI)	23
• IZRAŽAVANJE VREDNOSTI MNOGO VEĆIH I MNOGO MANJIH OD OSNOVNE MERNE JEDINICE	24
• PRAVILNO ZAOKRUŽIVANJE PROŠIRENE MERNE NESIGURNOSTI I KONAČNOG REZULTATA MERENJA	25

PRVI CIKLUS LABORATORIJSKIH VEŽBI	27
• VEŽBA BR. 1: ODREĐIVANJE GUSTINE TEČNOSTI HIDROMETROM	29
• OSNOVNI PRINCIPI MERENJA PRITISKA	31
• VEŽBA BR. 2: ODREĐIVANJE ODNOSA $\kappa = C_p/C_v$ ZA VAZDUH	33
• OSNOVNE VRSTE TERMOMETARA	36
• VEŽBA BR. 3: ODREĐIVANJE ZAVISNOSTI TAČKE KLJUČANJA VODE OD PRITISKA	37
• KALORIMETAR	41
• VEŽBA BR. 4: ODREĐIVANJE SPECIFIČNE TOPLOTE ISPARAVANJA VODE	42
• VEŽBA BR. 5: ODREĐIVANJE TALASNE DUŽINE SVETLOSTI POMOĆU FRAUNHOFEROVE DIFRAKCIJE	48
• VEŽBA BR. 6: ODREĐIVANJE RIDBERGOVE KONSTANTE	53
DRUGI CIKLUS LABORATORIJSKIH VEŽBI	57
• VEŽBA BR. 7: ODREĐIVANJE UBRZANJA ZEMLJINE TEŽE POMOĆU MATEMATIČKOG KLATNA	59
• MEHANIČKA MERILA DUŽINE	67
- KLJUNASTO POMIČNO MERILO (NONIJUS)	67
- MIKROMETARSKI ZAVRTANJ	68
• VEŽBA BR. 8: ODREĐIVANJE TORZIONE KONSTANTE I MODULA TORZIJE ŽICE	70
• VEŽBA BR. 9: ODREĐIVANJE MOMENTA INERCIJE TELA NEPRAVILNOG OBLIKA POMOĆU TORZIONOG KLATNA	76
• VEŽBA BR. 10: ODREĐIVANJE BRZINE ZVUKA POMOĆU KUNTOVE CEVI	81
• LITERATURA	85

VEŽBA BR. 8: ODREĐIVANJE TORZIONE KONSTANTE I MODULA TORZIJE ŽICE

- *Torzija (uvrtanje) predstavlja specijalan slučaj deformacije smicanja i najčešće se javlja kod osovina u raznim mašinama. Kao vid naprezanja se vrlo često sreće i u tehnici i u svakodnevnom životu (naprezanje u burgiji pri bušenju otvora, ili u osovini koja pokreće točak automobila, pri okretanju ključa u bravi, pomeranju kvake, okretanju vodovodne slavine, itd.).*
- *Građevinski materijali i objekti su osetljiviji na naprezanja tipa smicanja nego na kompresiona i istežuća naprezanja (horizontalni udari zemljotresa lako izazivaju rušenja).*
- *Torziona naprezanja su čest uzrok povreda i kod čoveka (npr. neke povrede kičmenog stuba, ekstremiteta i sl). Neka biološka tkiva i organi su mnogo osetljiviji na smicanje nego na kompresiju ili istežanje (npr. zubi mogu podneti znatna normalna naprezanja, ali se mogu oštetiti od malih naprezanja smicanja).*
- *Torzija se često koristi u fizičkim eksperimentima i fizičkim instrumentima. Npr. Kulon (Coulomb) je pomoću torzione vage dokazao svoj čuveni zakon iz elektrostatike, a Kevendiš (Cavendish) je torzionu vagu koristio za određivanje gravitacione konstante (torziona vaga može da meri veoma male vrednosti momenta i sile na osnovu torzije vrlo tankog elastičnog vlakna).*

Torzija žice

Ako na žicu ili šipku, koja je na jednom svom kraju pričvršćena, deluje spreg sila tangencijalno na površinu poprečnog preseka slobodnog kraja, žica će se deformisati, tj. uvrnuti. Tangencijalni napon, uslovljen dejstvom pomenutog sprega sila, će u centru površine poprečnog preseka biti jednak nuli, a povećavaće se prema periferiji. Proporcionalno naponu će nastati relativna pomeranja svakog sloja razmatranog cilindra (žice ili šipke), u odnosu na njegove susedne slojeve.

Moment sile potreban da se uvrne jedan kraj nekog štapa ili žice, za izvestan ugao φ u odnosu na drugi kraj, može se proračunati deljenjem štapa na tanke ljske (slojeve), izračunavanjem momenata za svaku ljsku i njihovim sabiranjem (integracijom duž poluprečnika) u rezultatni moment. Dobija se da ukupni moment sile, u odnosu na osu uvrtnja žice, iznosi:

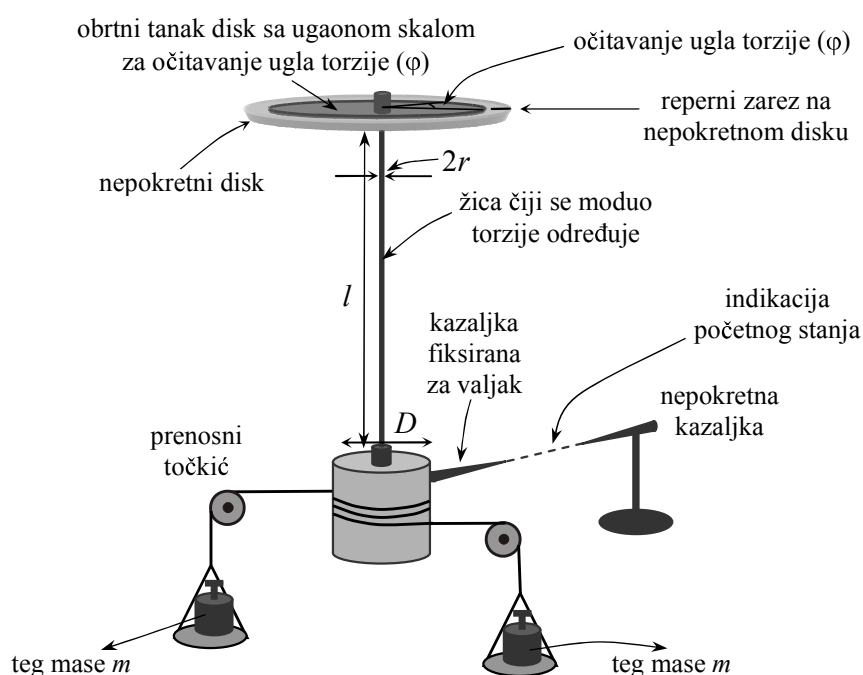
$$M = E_s \pi \varphi r^4 / 2l , \quad (8.1)$$

gde je: r poluprečnik žice, l dužina žice, E_s moduo torzije datog materijala. Odnos momenta M i ugla φ uvrtnja je konstantna veličina za datu žicu (zavisi od prirode materijala i dimenzija žice) i naziva se — torziona konstanta c . Važi:

$$c = \frac{M}{\varphi} = \frac{E_s \pi r^4}{2l} . \quad (8.2)$$

Merna oprema i postupak pri određivanju torzione konstante i modula torzije žice

Merna oprema obuhvata: aparaturu prikazanu na slici 8.1, komplet tegova čija se masa kreće u opsegu $m \in (5-100)$ g, lenjir (sa milimetarskom podelom), nonijus (kljunasto pomično merilo) i mikrometerski zavrtnanj. Žica čiji moduo torzije treba odrediti je gornjim krajem učvršćena za centar obrtnog diska sa kružnom skalom, pri čemu se taj disk ručno može okretati u odnosu na donji nepokretni disk sa repnim zarezom. Donji kraj žice je fiksiran za težak metalni valjak. Oko tog valjka je namotan konac, u cilju ostvarivanja sprega sila kojim će se uvrnuti valjak, a time i izvršiti torzija žice.



Slika 8. 1 – Skica aparature za određivanje torzione konstante i modula torzije žice.

Celokupno merenje obuhvata nekoliko faza, koje su navedene u daljem tekstu.

- Prečnik žice o koju je okačen valjak (videti sl. 8.1) se izmeri mikrometerskim zavrtnjem na tri mesta i izračuna se srednja vrednost, $2r_s$. Odatle se odredi srednji poluprečnik: r_s .
- Dužina žice (l) se izmeri lenjirom.
- Prečnik (D) valjka učvršćenog na donjem kraju žice se izmeri jednom, pomoću kljunastog pomičnog merila.
- Na valjak je namotan konac, čiji krajevi prelaze preko dva kotura. Na krajevima konca su obešeni tasovi. Dok su tasovi prazni, laganim pomeranjem gornjeg obrtnog diska sa ugaonom skalom u stepenima, kazaljka na valjku se postavlja u istu liniju sa nepokretnom (repernom)

kazaljkom (na sl. 8.1 je to označeno kao indikacija početnog stanja). Tada se na gornjem disku, pomoću reperenog zareza, očitava $\varphi = 0^\circ$.

- Stavljanjem tegova jednake mase na svaki od tasova stvara se spreg sila, koji izaziva uvrtnje žice. Zbog toga, dolazi do okretanja kazaljke pričvršćene za valjak, u odnosu na nepokretnu kazaljku, za neki ugao φ . Intenzitet momenta sprega koji je izazvao uvrtnje je jednak:

$$M = DQ = Dmg, \quad (8.3)$$

gde je D prečnik valjka.

- Pažljivim okretanjem gornjeg diska za ugao φ , kazaljka na valjku se ponovo postavlja u liniju sa repernom kazaljkom (tj. u isti položaj u kojem je bila kada su tasovi bili prazni). Ugao φ , koji se tada očitava na gornjem disku (u stepenima), je jednak uglu uvrtnja žice. Vrednost primenjene mase tegova na jednom od tasova i vrednost izmerenog ugla uvrtnja u stepenima, za dato merenje, se unose u Tabelu 8.1. Izračunava se M (u Nm) i φ (u radijanima) i upisuje.
- Pri sledećem merenju se u tasove stavlja veća masa tegova, da bi se ostvario veći moment sprega. Tokom zamene tegova ne treba dirati pokretni disk. Usled većeg momenta sprega, žica se uvrće za veću vrednost ugla. Nakon ostvarenog uvrtnja žice, gornji disk treba okrenuti tako da se kazaljka na valjku ponovo postavi u liniju sa repernom kazaljkom. Tada se očitava novi ugao uvrtnja.
- Postupak se dalje ponavlja, povećavajući masu tegova i očitavajući ugao uvrtnja žice.

Da bi bio ispunjen uslov malih uglova uvrtnja (tada važi: $M = c\varphi$), masa tegova na svakom od tasova treba da bude $m \leq 40$ g (npr. za sedam merenja se mogu uzeti vrednosti: 5 g, 10 g, 15 g, 20 g, 25 g, 30 g i 35 g).

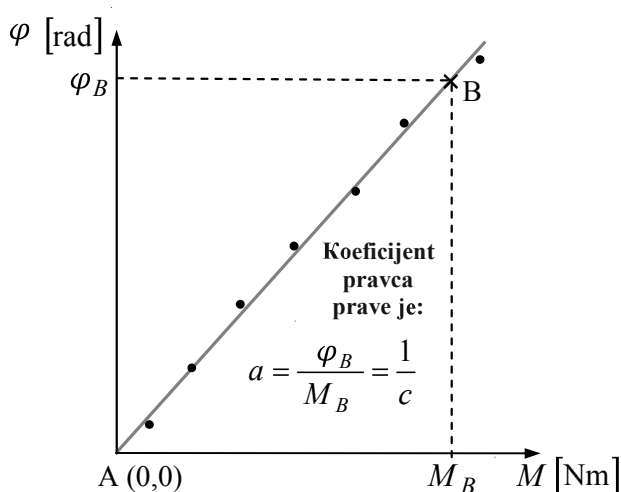
Tabela 8. 1 - Tabela za prikaz rezultata merenja

redni broj merenja	m (kg)	$M = mgD$ (Nm)	φ ($^\circ$)	(rad) = $\frac{(\text{ }^\circ)\pi}{180}$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				

Vrednost momenta M treba pri datom merenju zaokružiti na onom decimalnom mestu na kojem se nalazi prva nenulta cifra u vrednosti $U_M = mgU_D$, gde se za U_D uzima vrednost najmanjeg podeoka na upotrebljenom nonijusu.

Iz relacije $M = c\varphi$ sledi: $\varphi = M/c$, pri čemu je φ izraženo u (*rad*). Onda će grafik $\varphi = f(M)$ predstavljati pravolinijsku zavisnost sa koeficijentom pravca $a = 1/c$. Ukoliko se sa grafika $\varphi = f(M)$ odredi koeficijent pravca a , onda se vrednost c može izračunati kao $c = 1/a$. Ovaj postupak predstavlja grafički metod određivanja srednje vrednosti konstante torzije žice.

Grafički metod određivanja srednje vrednosti konstante torzije žice



Slika 8. 2– Primer grafičkog prikazivanja rezultata u vežbi.

Nakon popunjavanja gornje tabele (Tab. 8. 1), potrebno je nacrtati grafik zavisnosti $\varphi = f(M)$ na milimetarskom papiru, počevši od tačke (0,0). Crtanje dijagrama od nule u ovoj vežbi je opravdano, jer su vrednosti masa tegova priloženih uz aparaturu takve da grafik zavisnosti $\varphi = f(M)$ zauzima celu površinu dijagrama i u slučaju crtanja od tačke (0,0). Zatim se lenjirom povlači prava tako da ona prolazi kroz tačku (0,0), a da pri tome odstupanja pojedinačnih eksperimentalnih vrednosti od prave budu

minimalna i približno ista i sa gornje i sa donje strane prave. Povlačenje prave kroz tačku (0,0) u ovoj vežbi ima fizičkog smisla, jer iz relacije $M = c\varphi$ sledi da je za $M = 0$ ispunjeno: $\varphi = 0$, pa je tačka (0,0) fizički logična tačka za ovde razmatran dijagram. Ovako povučena prava je ujedno i najpribližnija aproksimacija matematički optimalne prave, a njen koeficijent pravca se može odrediti na osnovu koordinata dve tačke sa prave, pri čemu se kao jedna tačka (tačka A) može uzeti koordinatni početak (0,0) (videti sl. 8.2). U tom slučaju za koeficijent pravca pomenute prave važi:

$$a = \frac{\varphi_B}{M_B} \quad (8.4)$$

Vrednost c dobijena metodom grafičkog usrednjavanja je onda:

$$c = \frac{1}{a} = \frac{M_B}{\varphi_B} \quad (8.5)$$

Na osnovu tako određene vrednosti konstante torzije, kao i na osnovu izmerenih dimenzija žice (dužine i poluprečnika), izračunava se moduo torzije materijala od kojeg je žica napravljena. Iz jednačine (8. 2) sledi:

$$E_s = \frac{2lM}{\pi r^4 \varphi} = \frac{2lc}{\pi r^4} \quad (8.6)$$

Za vrednost poluprečnika žice treba uzeti srednji poluprečnik, r_s , određen na osnovu 3 merenja

$$\text{prečnika žice } (r_s = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{d_i}{2}).$$

Merna nesigurnost za eksperimentalno određenu vrednost:

a) konstante torzije žice i b) modula torzije žice

a) Polazeći od toga da je konstanta torzije date žice eksperimentalno određena primenom izraza $c = M_B / \varphi_B$, može se, na osnovu izraza (35) iz uvodnog dela praktikuma, konstatovati da za standardnu mernu nesigurnost tako određene vrednosti konstante torzije žice važi:

$$u_c = c \sqrt{\left(\frac{u_\varphi}{\varphi_B}\right)^2 + \left(\frac{u_M}{M_B}\right)^2}. \quad (8.7)$$

U poslednjem izrazu je $M = DQ = Dmg$, pa sledi:

$$\frac{u_M}{M_B} = \frac{u_D}{D}, \quad (8.8)$$

jer se u vežbi faktor mg tretira kao konstanta (u toku eksperimenta se ne meri ni g ni m , već se oni uzimaju kao poznate konstante). Zamenom (8.8) u (8.7), dobijamo:

$$u_c = c \cdot \sqrt{\left(\frac{u_\varphi}{\varphi_B}\right)^2 + \left(\frac{u_D}{D}\right)^2}. \quad (8.9)$$

U poslednjem izrazu je:

- $u_\varphi = \frac{U_\varphi}{\sqrt{3}} = \frac{1^\circ}{\sqrt{3}}$ (za U_φ se može uzeti vrednost najmanjeg podeoka na kružnoj skali na kojoj očitavamo φ u stepenima);
- $u_D = \frac{U_D}{\sqrt{3}}$ (zavisno od vrste nonijusa, za U_D se može uzeti: 0,1 mm, ili 0,05 mm, ili 0,02 mm).

Proširenu mernu nesigurnost proračunate konstante torzije žice određujemo uz pretpostavku da se može govoriti o Gausovoj raspodeli dobijenih vrednosti za c , pri čemu vrednost faktora obuhvata iznosi $k=3$. Sledi:

$$U_c = 3u_c = 3c \cdot \sqrt{\left(\frac{u_\varphi}{\varphi_B}\right)^2 + \left(\frac{u_D}{D}\right)^2}. \quad (8.10)$$

Proširena merna nesigurnost U_c se zaokružuje tako da sadrži samo jednu cifru različitu od nule. Na osnovu zaokruženog U_c se zaokružuje proračunata vrednost za c . Konačni zapis rezultata indirektnog merenja konstante torzije žice se prikazuje u obliku:

$$c = \left(\underline{\hspace{2cm}} \pm \underline{\hspace{2cm}} \right) \underline{\hspace{2cm}} . \quad (8.11)$$

b) Na osnovu izraza (8.6) i izraza (35) iz uvodnog dela praktikuma, sledi da se standardna merna nesigurnost modula torzije žice izračunava prema sledećoj formuli:

$$u_{E_s} = E_s \sqrt{\left(\frac{u_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{4u_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{u_c}{c}\right)^2} . \quad (8.12)$$

Zamenom (8.9) u (8.12) dobijamo:

$$u_{E_s} = E_s \sqrt{\left(\frac{u_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{4u_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{u_\varphi}{\varphi_B}\right)^2 + \left(\frac{u_D}{D}\right)^2} . \quad (8.13)$$

U poslednjem izrazu je:

- $u_l = \frac{U_l}{\sqrt{3}}$ (za U_l se može uzeti vrednost najmanjeg podeoka na metarskoj traci na kojoj očitavamo dužinu žice);

- $u_r = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial d}\right)^2} u_d^2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} u_d^2 = \frac{1}{2} \sqrt{u_{dA}^2 + u_{dB}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (d_i - d_s)^2}{3 \cdot (3-1)} + \left(\frac{U_{dB}}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (r_i - r_s)^2}{3 \cdot (3-1)} + \left(\frac{U_{dB}}{2\sqrt{3}}\right)^2}$

U sumi $\sum_{i=1}^n (r_i - r_s)^2$ je sa n označen broj ponovljenih direktnih merenja prečnika žice (u tekstu koje se odnosi na merni postupak u ovoj vežbi je data preporuka da bude $n = 3$). Za U_{dB} se može uzeti vrednost najmanjeg podeoka na mikrometarskom zavrtnju ($0,01 \cdot 10^{-3} \text{ m}$), ili vrednost polovine podeoka ($0,005 \cdot 10^{-3} \text{ m}$);

Proširenu mernu nesigurnost proračunatog modula torzije žice određujemo uz pretpostavku da se može govoriti o Gausovoj raspodeli dobijenih vrednosti za E_s , pri čemu vrednost faktora obuhvata iznosi $k = 3$. Sledi:

$$U_{E_s} = 3u_{E_s} = 3E_s \sqrt{\left(\frac{u_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{4u_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{u_\varphi}{\varphi_B}\right)^2 + \left(\frac{u_D}{D}\right)^2} . \quad (8.14)$$

Proširena merna nesigurnost U_{E_s} se zaokružuje tako da sadrži samo jednu cifru različitu od nule. Na osnovu zaokruženog U_{E_s} se zaokružuje proračunata vrednost E_s . Konačni zapis rezultata indirektnog merenja modula torzije žice se prikazuje u obliku:

$$E_s = \left(\underline{\hspace{2cm}} \pm \underline{\hspace{2cm}} \right) \underline{\hspace{2cm}} \quad (8.15)$$