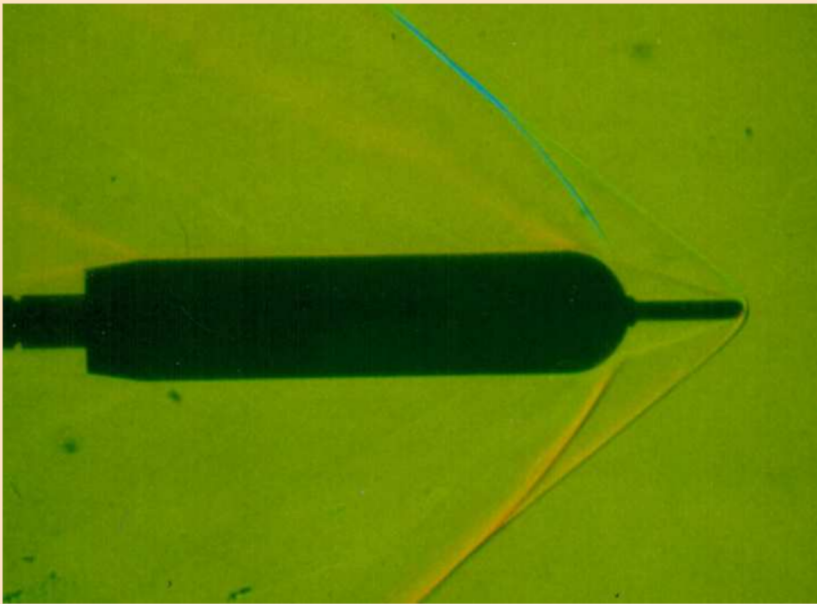


Универзитет у Београду  
Машински факултет

Снежана С. Милићев

Александар С. Ћоћић

# Приручник за прорачун струјања стишљивог флуида - са изводима из теорије -



Београд, 2017.

# Садржај

<b>1</b>	<b>Стандардна атмосфера</b>	<b>1</b>
	ТАБЕЛА 1: Стандардна атмосфера . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Струјање гаса под изентропским условима</b>	<b>11</b>
	ТАБЕЛА 2: Струјање гаса под изентропским условима . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Прав ударни талас</b>	<b>43</b>
	ТАБЕЛА 3: Прав ударни талас . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Кос ударни талас</b>	<b>65</b>
	ТАБЕЛА 4: Кос ударни талас . . . . .	149
<b>5</b>	<b>Струјање гаса са разменом топлоте (Рејлијево струјање)</b>	<b>149</b>
	ТАБЕЛА 5: Струјање гаса са разменом топлоте . . . . .	154
<b>6</b>	<b>Адијабатско струјање са трењем (Фаноово струјање)</b>	<b>171</b>
	ТАБЕЛА 6: Адијабатско струјање са трењем . . . . .	179
<b>7</b>	<b>Изотермско струјање са трењем</b>	<b>197</b>
	ТАБЕЛА 7: Изотермско струјање са трењем . . . . .	202
	<b>Литература</b>	<b>219</b>

# 1

## Стандардна атмосфера

Земљина атмосфера састоји се из четири слоја. Од површине Земље, то су редом:

- тропосфера, дебљине око 11 km;
- стратосфера, (11 – 50) km;
- мезосфера, (50 – 70) km;
- јоносфера, изнад 70 km.

У табели 1 дати су параметри стандардне атмосфере: температура  $T$  [K], притисак  $p$  [Pa], густина  $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>], брзина звука  $c$  [m/s] и кинематичка вискозност  $\nu$  [m<sup>2</sup>/s]. Параметри су дати до висине 20 km, са кораком од 100 m. То подразумева тропосферу (до 11 km) и део стратосфере (11 – 20) km.

### Тропосфера

Температура у области тропосфере опада линеарно са висином, 6,5 K по километру висине, почев од температуре на нивоу мора, која износи  $T_0 = 288$  K, па је закон промене температуре:

$$T(z) = T_0 - \gamma z, \quad (1.1)$$

где је  $\gamma = 6,5$  K/km. Заменом израза за густину из једначине стања идеалног гаса  $p/\rho = RT$  у диференцијални облик Ојлерове једначине  $dp = -\rho g dz$  за мировање стишљивог флуида у пољу силе Земљине теже (слика 1.1) добија се следећа диференцијална једначина:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g(z)}{R(T_0 - \gamma z)} dz. \quad (1.2)$$

Специфична гасна константа за ваздух износи  $R = 287,1$  J/(kgK). Гравитационо убрзање се мења са растојањем од површине Земље на основу релације:

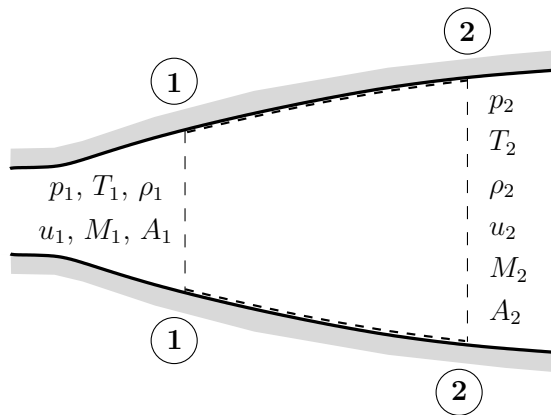
ТАБЕЛА 1: Стандардна атмосфера

$z$ [m]	$g$ [m/s <sup>2</sup> ]	$T$ [K]	$p$ [Pa]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$c$ [m/s]	$10^5 \nu$ [m <sup>2</sup> /s]
0	9,8065	288,00	101325	1,2254	340,23	1,4596
100	9,8062	287,35	100130	1,2137	339,85	1,4711
200	9,8059	286,70	98945	1,2021	339,46	1,4828
300	9,8056	286,05	97771	1,1905	339,08	1,4945
400	9,8053	285,40	96610	1,1791	338,69	1,5064
500	9,8050	284,75	95459	1,1677	338,31	1,5183
600	9,8047	284,10	94319	1,1564	337,92	1,5305
700	9,8043	283,45	93191	1,1452	337,54	1,5427
800	9,8040	282,80	92073	1,1340	337,15	1,5550
900	9,8037	282,15	90967	1,1230	336,76	1,5675
1000	9,8034	281,50	89871	1,1120	336,37	1,5801
1100	9,8031	280,85	88786	1,1011	335,98	1,5929
1200	9,8028	280,20	87711	1,0903	335,59	1,6057
1300	9,8025	279,55	86647	1,0796	335,20	1,6187
1400	9,8022	278,90	85594	1,0690	334,81	1,6319
1500	9,8019	278,25	84551	1,0584	334,42	1,6451
1600	9,8016	277,60	83518	1,0479	334,03	1,6585
1700	9,8013	276,95	82495	1,0375	333,64	1,6721
1800	9,8010	276,30	81483	1,0272	333,25	1,6858
1900	9,8007	275,65	80481	1,0170	332,86	1,6996
2000	9,8003	275,00	79488	1,0068	332,47	1,7136
2100	9,8000	274,35	78506	0,99670	332,07	1,7277
2200	9,7997	273,70	77534	0,98669	331,68	1,7420
2300	9,7994	273,05	76571	0,97676	331,28	1,7564
2400	9,7991	272,40	75618	0,96690	330,89	1,7710
2500	9,7988	271,75	74674	0,95713	330,50	1,7857
2600	9,7985	271,10	73741	0,94742	330,10	1,8006
2700	9,7982	270,45	72816	0,93779	329,70	1,8156
2800	9,7979	269,80	71901	0,92824	329,31	1,8308

# 2

## Струјање гаса под изентропским условима

У овом делу разматраће се струјање гаса кроз канал или цев променљивог попречног пресека (слика 2.1) и услови под којима се струјање може сматрати изентропским. При том ће се увести одређене претпоставке.



Слика 2.1. Контролна запремина у цеви или каналу променљивог попречног пресека.

Као што је уобичајено при струјању гасова у општем случају, биће занемарен утицај силе Земљине теже. Такође, претпоставиће се да се струјање гаса од пресека 1-1 до пресека 2-2 одвија без размене топлоте са околином (струјање је **адијабатско**), а занемариће се и утицај трења (**невискозно** струјање). Осим тога, да би струјање гаса било изентропско, потребно је да **нема површи дисконтинуитета, ни струјне машине** између пресека. Изентропским се често могу третирати струјања кроз млазнике, дифузоре и међулопатичне просторе код гасних турбина и компресора.

## Основне једначине у интегралном облику

За поставку основних једначина у интегралном облику биће изабрана контролна запремина чије су границе зидови канала и попречни пресеци 1-1 и 2-2 (на слици 2.1 обележена је испрекиданом линијом). Основне једначине, једначина континуитета, количине кретања (Ојлерова једначина) и енергије које следе из интегралног облика основних једначина написаних за ову контролну запремину, редом гласе:

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2, \quad (\dot{m} = \rho u A = \text{const.}) \quad (2.1)$$

$$\rho_1 A_1 + \dot{m} u_1 + \int_{A_1}^{A_2} p \, dA = \rho_2 A_2 + \dot{m} u_2, \quad (2.2)$$

$$\underbrace{\left[ e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} \right]}_{h_{01}} = \underbrace{\left[ e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} \right]}_{h_{02}}, \quad \left( h + \frac{u^2}{2} = h_0 = \text{const.} \right) \quad (2.3)$$





За затварање система једначина (2.1)-(2.3) неопходно је узети конститутивну једначину која повезује скаларна поља притиска, густине и температуре (једначину стања). За модел идеалног гаса<sup>1</sup> који се овде користи важи Клапејронова једначина стања:

$$p = \rho RT. \quad (2.4)$$

Површина  $A$ , притисак  $p$ , густина  $\rho$ , температура  $T$ , јединична енталпија  $h$ , брзина  $u$  и Махов број  $M$  у оба попречна пресека обележени су одговарајућим индексом.

Јединична енталпија је збир јединичне унутрашње енергије  $e$  која представља кинетичку енергију хаотичног кретања молекула гаса по јединици масе и јединичне струјне енергије гаса  $p/\rho$ . Збир јединичне енталпије (надаље само „енталпије“) и јединичне кинетичке енергије гаса  $u^2/2$  је тотална енталпија  $h_0$  по јединици масе (надаље само „тотална енталпија“) и она представља укупну јединичну енергију гаса при струјању. Када се ова укупна јединична струјна енергија гаса не мења од пресека до пресека, важи једначина енергије (2.3), а струјање се назива **изоенергетско**. То је струјање гаса при ком се занемарује размена топлоте са околином (струјање је **адијабатско**), а такође подразумева **одсуство струјне машине**. Једначина енергије при изоенергетском струјању  $h_0 = \text{const.}$  важи уз наведена ограничења, али дозвољава

<sup>1</sup>Идеални гас је модел гаса код ког се може занемарити утицај међумолекуларних сила.

$M < 1$  или $M > 1$ и 	$T_0 = \text{const.}$ $p_0 = \text{const.}$	$u \uparrow$	$M \uparrow$	$p \downarrow$	$\rho \downarrow$	$T \downarrow$
$M < 1$  или $M > 1$ и 		$u \downarrow$	$M \downarrow$	$p \uparrow$	$\rho \uparrow$	$T \uparrow$

**Слика 2.5.** Промене физичких величина са променом попречног пресека код надзвучног и дозвучног струјања.

том пресеку:

$$\frac{A_k}{A} = \frac{\rho u}{\rho_k u_k} = M \left[ \frac{2}{\kappa + 1} \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{-(\kappa+1)}{2(\kappa-1)}}, \tag{2.23}$$

што је иста функција као у једначини (2.21). Разлика је у домену, тј. једначина (2.21) одговара  $M \in [0, 1]$ , док у једначини (2.23) Махов број може узимати све вредности  $M \in [0, \infty)$ . Наиме, анализом функције са десне стране једначине (2.23) показује се да за сваки однос површина  $A_k/A$  постоје два могућа Махова броја у пресеку  $A$ , један који одговара дозвучној  $M < 1$  и један који одговара надзвучној струји  $M > 1$ . О томе треба посебно водити рачуна при одређивању вредности Маховог броја из табеле 2 на основу познатог количника  $A/A_k$ . Однос површина  $A/A_k$  у функцији Маховог броја који следи из једначине (2.23) приказан је на дијаграму на слици 2.4.

### Прантл-Мајерова функција

Проблем надзвучног струјања гаса дуж контуре која има облик тупог угла има велики практични значај у аеродинамици великих брзина. У случају опструјавања угла  $180^\circ \pm d\alpha$  (за инфинитезималну вредност већег или мањег од  $180^\circ$ , где је  $d\alpha$  позитивно), надзвучна струја гаса изложена је малом поремећају, па се струјање може сматрати изентропским. Из темена опструјаваног угла креће Махова линија, која је граница између поремећене и непоремећене области (у равни цртежа то је линија, а у простору раван). Угао нагиба Махове линије у односу на непоремећену струју гаса  $\mu$  одређен је вредношћу Маховог броја према (2.14). Показује се да се количина кретања гаса мења само у правцу управном на Махову линију, па је по другом Њутновом закону механике то правац резултујуће силе (резултанта нема компоненту у правцу Махове линије). Како важи једначина континуитета, пројекције брзине струјања на Махову линију у поремећеној и непоремећеној области струјања су једнаке:  $u \cos \mu = (u + du) \cos(\mu \pm d\alpha)$ . Имајући у виду да се ради о инфинитезималној вредности угла  $\alpha$ , одбацивањем малих величина другог

**ТАБЕЛА 2: Струјање гаса под изентропским условима**

Дозвучно струјање						
$M$	$T_0/T$	$p_0/p$	$A/A_k$	$L$	$\dot{m}/\dot{m}_{\max}$	$\varepsilon_{pd}$ [%]
0,00	1,0000	1,0000	$\infty$	0,00000	0,00000	0,00000
0,01	1,0000	1,0001	57,874	0,010954	0,017279	$2,5000 \cdot 10^{-3}$
0,02	1,0001	1,0003	28,942	0,021908	0,034552	0,010000
0,03	1,0002	1,0006	19,301	0,032860	0,051812	0,022502
0,04	1,0003	1,0011	14,481	0,043811	0,069054	0,040006
0,05	1,0005	1,0018	11,591	0,054759	0,086271	0,062516
0,06	1,0007	1,0025	9,6659	0,065703	0,10346	0,090032
0,07	1,0010	1,0034	8,2915	0,076644	0,12061	0,12256
0,08	1,0013	1,0045	7,2616	0,087580	0,13771	0,16010
0,09	1,0016	1,0057	6,4613	0,098510	0,15477	0,20266
0,10	1,0020	1,0070	5,8218	0,10944	0,17177	0,25025
0,11	1,0024	1,0085	5,2992	0,12035	0,18871	0,30287
0,12	1,0029	1,0101	4,8643	0,13126	0,20558	0,36052
0,13	1,0034	1,0119	4,4969	0,14217	0,22238	0,42321
0,14	1,0039	1,0138	4,1824	0,15306	0,23910	0,49096
0,15	1,0045	1,0158	3,9103	0,16395	0,25573	0,56377
0,16	1,0051	1,0180	3,6727	0,17482	0,27228	0,64164
0,17	1,0058	1,0204	3,4635	0,18569	0,28872	0,72459
0,18	1,0065	1,0229	3,2779	0,19654	0,30507	0,81263
0,19	1,0072	1,0255	3,1123	0,20739	0,32131	0,90576
0,20	1,0080	1,0283	2,9635	0,21822	0,33744	1,0040
0,21	1,0088	1,0312	2,8293	0,22904	0,35345	1,1074
0,22	1,0097	1,0343	2,7076	0,23984	0,36933	1,2159
0,23	1,0106	1,0375	2,5968	0,25063	0,38509	1,3295
0,24	1,0115	1,0409	2,4956	0,26141	0,40071	1,4483
0,25	1,0125	1,0444	2,4027	0,27217	0,41620	1,5723
0,26	1,0135	1,0481	2,3173	0,28291	0,43154	1,7014
0,27	1,0146	1,0520	2,2385	0,29364	0,44673	1,8358



# 3

## Прав ударни талас

Као што је у претходном поглављу наведено поремећаји притиска у стишљивој средини крећу се коначном константном брзином. За разлику од инфинитезимално малих поремећаја који се у виду звучних таласа простиру кроз стишљив флуид брзином звука, промене притиска које су истог реда величине или веће у односу на струјни притисак пре настанка промене, простиру се кроз стишљив флуид већом брзином. То су поремећаји коначног интензитета и праћени су коначним променама осталих физичких величина. Како се догађају на врло малим ширинама, које су реда величине неколико дужина слободног пута молекула<sup>1</sup>, у струјном пољу представљају површи дисконтинуитета које се називају ударни таласи. Када је ударни талас управан на правац струјања гаса, ради се о правом ударном таласу. У супротном, у питању је кос ударни талас. У овом поглављу разматраће се струјање кроз прав ударни талас.

Постоје још две значајне разлике између правог ударног таласа и инфинитезималног поремећаја. То је чињеница да се ударни талас формира само у случају компресије, док коначна експанзија у струјном пољу не изазива појаву ударног таласа (видети у 2. поглављу Прантл-Мајерову експанзију). Насупрот томе, када се ради о инфинитезималном поремећају нема разлике између експанзионог и компресионог инфинитезималног поремећаја. Друга битна разлика односи се на чињеницу да се звучни таласи простиру под изентропским условима, док је струјање кроз ударни талас (површ дисконтинуитета) изразито неповратан процес (неизентропско струјање).

Прав ударни талас може настати искључиво у надзвучној струји гаса или при надзвучном лету објекта (летилице) кроз ваздух, ако за то постоје потребни услови. У случају унутрашњег струјања прав ударни талас може настати у надзвучној струји гаса, на пример у дивергентном делу млазника, изазван неком препреком. Информацију о препреци преносе брзином звука у свим правцима молекули који ударају у препреку. Међутим, гас струји надзвучном брзином, тако да информација о препреци не може да прође узводно како би

---

<sup>1</sup>Дужина слободног пута молекула на нормалним условима ( $p = 101325 \text{ Pa}$ ,  $t = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ ) је реда величине  $10^{-7} \text{ m}$ .

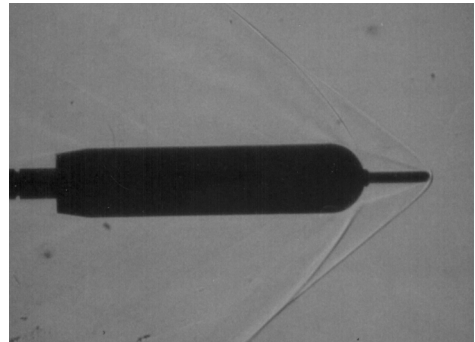
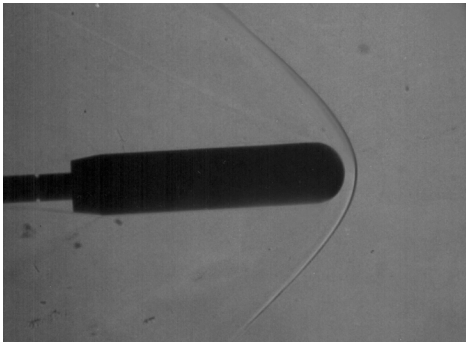
ТАБЕЛА 3: Прав ударни талас

$M_1$	$M_2$	$T_2/T_1$	$p_2/p_1$	$p_{02}/p_{01}$	$p_{02}/p_1$	$u_2/u_1$	$\Delta s/R$
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,8929	1,0000	0,00000
1,01	0,99013	1,0066	1,0234	1,0000	1,9152	0,98358	$1,2708 \cdot 10^{-6}$
1,02	0,98052	1,0132	1,0471	0,99999	1,9379	0,96764	$9,9682 \cdot 10^{-6}$
1,03	0,97115	1,0198	1,0710	0,99997	1,9610	0,95216	$3,2995 \cdot 10^{-5}$
1,04	0,96203	1,0263	1,0952	0,99992	1,9844	0,93713	$7,6720 \cdot 10^{-5}$
1,05	0,95313	1,0328	1,1196	0,99985	2,0083	0,92252	$1,4702 \cdot 10^{-4}$
1,06	0,94445	1,0393	1,1442	0,99975	2,0325	0,90833	$2,4931 \cdot 10^{-4}$
1,07	0,93598	1,0458	1,1691	0,99961	2,0570	0,89453	$3,8859 \cdot 10^{-4}$
1,08	0,92771	1,0522	1,1941	0,99943	2,0819	0,88112	$5,6946 \cdot 10^{-4}$
1,09	0,91965	1,0586	1,2195	0,99920	2,1072	0,86807	$7,9615 \cdot 10^{-4}$
1,10	0,91177	1,0649	1,2450	0,99893	2,1328	0,85537	$1,0726 \cdot 10^{-3}$
1,11	0,90408	1,0713	1,2708	0,99860	2,1588	0,84302	$1,4023 \cdot 10^{-3}$
1,12	0,89656	1,0776	1,2968	0,99821	2,1851	0,83099	$1,7885 \cdot 10^{-3}$
1,13	0,88922	1,0840	1,3230	0,99777	2,2118	0,81929	$2,2344 \cdot 10^{-3}$
1,14	0,88204	1,0903	1,3495	0,99726	2,2388	0,80789	$2,7426 \cdot 10^{-3}$
1,15	0,87502	1,0966	1,3762	0,99669	2,2661	0,79679	$3,3157 \cdot 10^{-3}$
1,16	0,86816	1,1029	1,4032	0,99605	2,2937	0,78597	$3,9560 \cdot 10^{-3}$
1,17	0,86145	1,1092	1,4304	0,99535	2,3217	0,77543	$4,6655 \cdot 10^{-3}$
1,18	0,85488	1,1154	1,4578	0,99457	2,3500	0,76515	$5,4462 \cdot 10^{-3}$
1,19	0,84846	1,1217	1,4854	0,99372	2,3786	0,75514	$6,2997 \cdot 10^{-3}$
1,20	0,84217	1,1280	1,5133	0,99280	2,4075	0,74537	$7,2277 \cdot 10^{-3}$
1,21	0,83601	1,1343	1,5414	0,99180	2,4367	0,73584	$8,2314 \cdot 10^{-3}$
1,22	0,82999	1,1405	1,5698	0,99073	2,4663	0,72655	$9,3123 \cdot 10^{-3}$
1,23	0,82408	1,1468	1,5984	0,98958	2,4961	0,71749	$1,0471 \cdot 10^{-2}$
1,24	0,81830	1,1531	1,6272	0,98836	2,5263	0,70864	$1,1710 \cdot 10^{-2}$
1,25	0,81264	1,1594	1,6562	0,98706	2,5568	0,70000	$1,3028 \cdot 10^{-2}$
1,26	0,80709	1,1657	1,6855	0,98568	2,5875	0,69157	$1,4427 \cdot 10^{-2}$
1,27	0,80164	1,1720	1,7151	0,98422	2,6186	0,68333	$1,5907 \cdot 10^{-2}$
1,28	0,79631	1,1783	1,7448	0,98268	2,6500	0,67529	$1,7470 \cdot 10^{-2}$

# 4

## Кос ударни талас

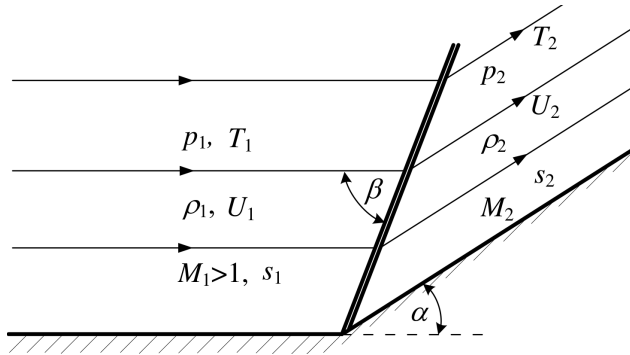
Кос ударни талас је поремећај коначног интензитета који у струјном пољу стишљивог флуида изазива коначне промене како притиска тако и других физичких величина. Простире се кроз стишљив флуид већом брзином од брзине звука којом се простиру инфинитезимално мали поремећаји. Осим тога, кос ударни талас може настати при надзвучном лету летилица или при надзвучном опструјавању њихових модела струјом ваздуха, при испитивању у аеротунелима, ако за то постоје потребни услови. Кос ударни талас представља у струјном пољу површ дисконтинуитета која са правцем струјања формира угао различит од правог.



**Слика 4.1.** Шлирен фотографије начињене при испитивању утицаја игле при надзвучном опструјавању модела ракете у ваздушном тунелу Т-36 Војнотехничког института у Београду.

На слици 4.1 приказани су снимци надзвучног опструјавања ваздухом модела ракете са заобљеним врхом и иглом при врху, начињени шлирен методом [2]. Игла служи да одвојени ударни талас који се јавља испред модела ракете без игле и који је у широј зони зауставне тачке прав (снажан талас) преведе у систем од два таласа: косог на врху игле и иза њега слабијег одвојеног таласа. Анализом таквог струјања показује се да се у случају ракете са иглом постиже мањи отпор при лету, као и мањи пораст ентропије. Што је угао ближи правом, то је талас снажнији.

На слици 4.2 приказан је кос ударни талас који настаје при надзвучном опструјавању угла који је за коначну вредност  $\alpha$  мањи од  $180^\circ$ , тако да изазива коначну компресију. Кос ударни талас обележен је дуплом линијом. Као што је случај када се у надзвучној струји гаса формира прав ударни талас (разматран у 3. поглављу) информација о препреци (у овом случају углу) не може да прође узводно како би се надзвучна струја на време прилагодила препреци. Како не може да прође кроз зид који је под углом  $\alpha$  у односу на непо ремећену струју гаса, тек кад дође до њега надзвучна струја нагло скреће за угао  $\alpha$ . Тако се формира кос ударни талас. То је површ дисконтинуитета која се налази под углом  $\beta$  у односу на непо ремећену струју. Угао  $\beta$  је угао таласа и на основу једначине континуитета следи да је увек већи од угла  $\alpha$ . Као код правог ударног таласа и у случају косог ударног таласа долази до коначне промене притиска и других физичких величина. Међутим, надзвучна струја Маховог броја  $M_1 > 1$  најчешће прелази такође у надзвучну  $M_2 > 1$  са мањом вредношћу Маховог броја  $M_2 < M_1$ . Ипак, показује се да зависно од вредности  $M_1$  и угла скретања струје  $\alpha$  вредност  $M_2$  може бити и  $M_2 \leq 1$ . Као што је уобичајено, све величине испред таласа обележене су индексом 1, а иза таласа индексом 2.



Слика 4.2. Кос ударни талас при надзвучном опструјавању тупог угла.

С обзиром да се при струјању кроз кос ударни талас мења правац струјања, не могу се применити исте једначине које одговарају струјању кроз прав ударни талас. На слици 4.3(а) приказани су вектори брзине узводне  $\vec{U}_1$  (испред таласа) и низводне  $\vec{U}_2$  (иза таласа) струје ваздуха, као и њихове компоненте дуж два међусобно управна правца, дуж таласа  $\vec{U}_{1t}$  и  $\vec{U}_{2t}$ , и управно на талас  $\vec{U}_{1n}$  и  $\vec{U}_{2n}$ . Масени проток кроз странице контролне запремине, обележене испрекиданом линијом, које су управне на талас, се анулира. Тако се интегрални облик једначине континуитета

$$\oiint_A \rho \vec{U} \cdot \vec{n} dA = 0$$

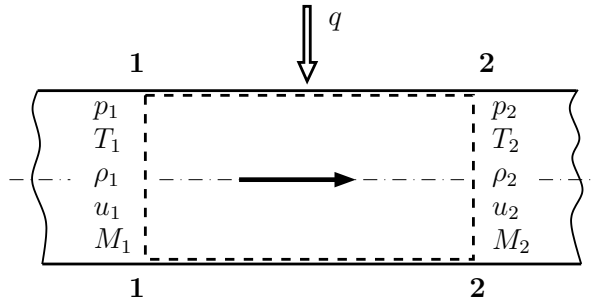
ТАБЕЛА 4: Кос ударни талас

$M_1 = 1,1; \alpha_{\max} = 1,52^\circ$												
Слаб ударни талас					Јак ударни талас							
$\alpha$	$M_2$	$\beta'$ [°]	$T_2/T_1$	$p_2/p_1$	$p_{02}/p_{01}$	$\Delta s/R$	$M_2$	$\beta''$ [°]	$T_2/T_1$	$p_2/p_1$	$p_{02}/p_{01}$	$\Delta s/R$
1	1,039	69,80	1,0214	1,0767	1,0000	$4,124 \cdot 10^{-5}$	0,9250	83,57	1,0605	1,2273	0,9991	$8,761 \cdot 10^{-4}$
$M_1 = 1,2; \alpha_{\max} = 3,94^\circ$												
Слаб ударни талас					Јак ударни талас							
$\alpha$	$M_2$	$\beta'$ [°]	$T_2/T_1$	$p_2/p_1$	$p_{02}/p_{01}$	$\Delta s/R$	$M_2$	$\beta''$ [°]	$T_2/T_1$	$p_2/p_1$	$p_{02}/p_{01}$	$\Delta s/R$
1	1,158	58,55	1,0157	1,0559	1,0000	$1,645 \cdot 10^{-5}$	0,8452	87,04	1,1270	1,5089	0,9930	$7,074 \cdot 10^{-3}$
2	1,111	61,05	1,0329	1,1197	0,9999	$1,475 \cdot 10^{-4}$	0,8551	83,86	1,1237	1,4941	0,9934	$6,581 \cdot 10^{-3}$
3	1,056	64,34	1,0532	1,1983	0,9994	$6,035 \cdot 10^{-4}$	0,8760	80,03	1,1166	1,4630	0,9944	$5,601 \cdot 10^{-3}$
$M_1 = 1,3; \alpha_{\max} = 6,66^\circ$												
Слаб ударни талас					Јак ударни талас							
$\alpha$	$M_2$	$\beta'$ [°]	$T_2/T_1$	$p_2/p_1$	$p_{02}/p_{01}$	$\Delta s/R$	$M_2$	$\beta''$ [°]	$T_2/T_1$	$p_2/p_1$	$p_{02}/p_{01}$	$\Delta s/R$
1	1,263	51,81	1,0144	1,0514	1,0000	$1,282 \cdot 10^{-5}$	0,7874	88,05	1,1904	1,8027	0,9795	$2,071 \cdot 10^{-2}$
2	1,224	53,47	1,0294	1,1065	0,9999	$1,058 \cdot 10^{-4}$	0,7918	86,06	1,1889	1,7957	0,9799	$2,030 \cdot 10^{-2}$
3	1,184	55,32	1,0451	1,1666	0,9996	$3,730 \cdot 10^{-4}$	0,7996	83,95	1,1863	1,7831	0,9806	$1,958 \cdot 10^{-2}$
4	1,140	57,42	1,0621	1,2334	0,9991	$9,408 \cdot 10^{-4}$	0,8118	81,65	1,1822	1,7634	0,9817	$1,848 \cdot 10^{-2}$
5	1,090	59,96	1,0810	1,3109	0,9980	$2,021 \cdot 10^{-3}$	0,8308	78,97	1,1757	1,7328	0,9833	$1,683 \cdot 10^{-2}$
6	1,027	63,46	1,1048	1,4113	0,9958	$4,161 \cdot 10^{-3}$	0,8636	75,37	1,1643	1,6793	0,9860	$1,412 \cdot 10^{-2}$

# 5

## Струјање гаса са разменом топлоте (Рејлијево струјање)

У овом поглављу разматра се утицај размене топлоте са околином при струјању гаса. Претпоставља се да се при стационарном струјању гаса кроз цев од пресека 1-1 до пресека 2-2 (слика 5.1) са околином размени количина топлоте по јединици масе  $q$  (јединична количина топлоте). Осим тога претпоставља се да се утицај вискозности (трење) може занемарити, односно гас се сматра невискозним. Када се топлота доводи из околине гасу  $q > 0$ , док је при одвођењу топлоте од гаса околини  $q < 0$ . Испрекидана линија означава границу контролне запремине.



**Слика 5.1.** Контролна запремина при струјању гаса са разменом топлоте са околином у цеви или каналу константног попречног пресека.

Из основних једначина у интегралном облику, за обележену контролну запремину приказану на слици 5.1, добијају се једначина континуитета, количине кретања и енергије у следећем облику:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \quad (5.1)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2, \quad (5.2)$$

$$c_p (T_{02} - T_{01}) = q. \quad (5.3)$$

Према једначини (5.3) следи да се при довођењу топлоте ( $q > 0$ ) повећава тотална температура гаса. Важи и обратно, тотална температура гаса опада

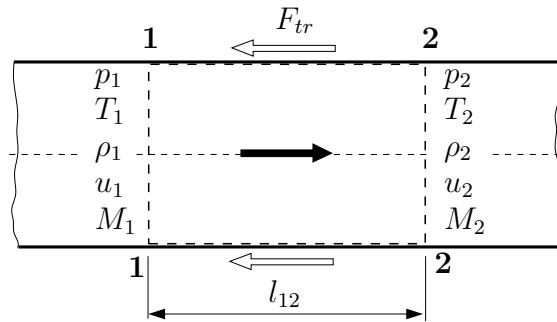
ТАБЕЛА 5: Струјање гаса са разменом топлоте

Дозвучно струјање						
$M$	$T/T_k$	$T_0/T_{0k}$	$p/p_k$	$p_0/p_{0k}$	$u/u_k$	$\Delta s/R$
0,00	0,00000	0,00000	2,4000	1,2679	0,0000	$\infty$
0,01	$5,7584 \cdot 10^{-4}$	$4,7988 \cdot 10^{-4}$	2,3997	1,2678	$2,3997 \cdot 10^{-4}$	$2,6984 \cdot 10^1$
0,02	$2,3014 \cdot 10^{-3}$	$1,9180 \cdot 10^{-3}$	2,3987	1,2675	$9,5946 \cdot 10^{-4}$	$2,2135 \cdot 10^1$
0,03	$5,1710 \cdot 10^{-3}$	$4,3099 \cdot 10^{-3}$	2,3970	1,2671	$2,1573 \cdot 10^{-3}$	$1,9301 \cdot 10^1$
0,04	$9,1749 \cdot 10^{-3}$	$7,6482 \cdot 10^{-3}$	2,3946	1,2665	$3,8314 \cdot 10^{-3}$	$1,7293 \cdot 10^1$
0,05	0,014300	0,011922	2,3916	1,2657	$5,9791 \cdot 10^{-3}$	$1,5738 \cdot 10^1$
0,06	0,020529	0,017119	2,3880	1,2647	$8,5967 \cdot 10^{-3}$	$1,4471 \cdot 10^1$
0,07	0,027841	0,023223	2,3836	1,2636	0,011680	$1,3403 \cdot 10^1$
0,08	0,036212	0,030215	2,3787	1,2623	0,015224	$1,2481 \cdot 10^1$
0,09	0,045616	0,038075	2,3731	1,2608	0,019222	$1,1670 \cdot 10^1$
0,10	0,056020	0,046777	2,3669	1,2591	0,023669	$1,0949 \cdot 10^1$
0,11	0,067393	0,056297	2,3600	1,2573	0,028556	$1,0299 \cdot 10^1$
0,12	0,079698	0,066606	2,3526	1,2554	0,033877	9,7088
0,13	0,092896	0,077675	2,3445	1,2533	0,039623	9,1690
0,14	0,10695	0,089471	2,3359	1,2510	0,045784	8,6724
0,15	0,12181	0,10196	2,3267	1,2486	0,052351	8,2131
0,16	0,13743	0,11511	2,3170	1,2461	0,059314	7,7865
0,17	0,15377	0,12888	2,3067	1,2434	0,066663	7,3889
0,18	0,17078	0,14324	2,2959	1,2406	0,074386	7,0169
0,19	0,18841	0,15814	2,2845	1,2377	0,082472	6,6681
0,20	0,20661	0,17355	2,2727	1,2346	0,090909	6,3402
0,21	0,22533	0,18943	2,2604	1,2314	0,099685	6,0312
0,22	0,24452	0,20574	2,2477	1,2281	0,10879	5,7395
0,23	0,26413	0,22244	2,2345	1,2247	0,11821	5,4636
0,24	0,28411	0,23948	2,2209	1,2213	0,12792	5,2023
0,25	0,30440	0,25684	2,2069	1,2177	0,13793	4,9545
0,26	0,32496	0,27446	2,1925	1,2140	0,14821	4,7193
0,27	0,34573	0,29231	2,1777	1,2102	0,15876	4,4956
0,28	0,36667	0,31035	2,1626	1,2064	0,16955	4,2828

# 6

## Адијабатско струјање са трењем (Фаноово струјање)

У случају струјања гаса кроз дуге, адијабатски изоловане цеви или канале, обавезно се мора узети у обзир утицај трења на зиду. Претпоставља се да се да је струјање гаса стационарно, да се размена топлоте са околином може занемарити (адијабатско струјање) и да су цев или канал константног попречног пресека (слика 6.1). Струјање гаса под претходно наведеним претпоставкама назива се Фаноово струјање. Испрекидана линија од пресека 1-1 до пресека 2-2 је граница контролне запремине.



Слика 6.1. Контролна запремина при адијабатском струјању вискозног гаса у цеви или каналу константног попречног пресека.

Из основних једначина у интегралном облику, за контролну запремину обележену на слици 6.1, добијају се једначина континуитета, количине кретања и енергије у следећем облику:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (\rho u = \text{const.}), \quad (6.1)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 + \frac{F_{tr}}{A}, \quad (6.2)$$

$$h_{01} = h_{02}, \quad (T_{01} = T_{02}), \quad (6.3)$$

где је  $F_{tr} = \tau_w \mathcal{O} L_{12}$  сила трења на зиду цеви од пресека 1-1 до пресека 2-2, а  $\tau_w$  тангенцијални напон на зиду цеви. Делујућем обе стране једначине (6.3) са



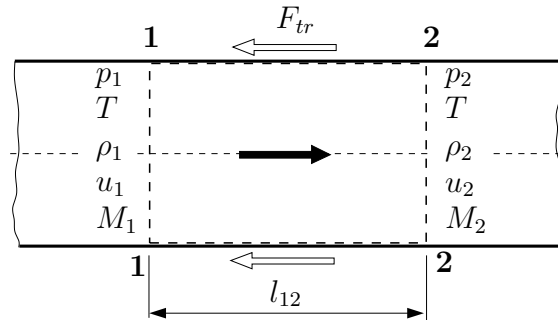
ТАБЕЛА 6: Адијабатско струјање са трењем

Дозвучно струјање						
$M$	$\lambda L_k/D_h$	$T/T_k$	$p/p_k$	$p_0/p_{0k}$	$u/u_k$	$\Delta s_k/R$
0,00	$\infty$	1,2000	$\infty$	$\infty$	0,00000	$\infty$
0,01	7134,4	1,2000	109,54	57,874	0,010954	4,0583
0,02	1778,4	1,1999	54,770	28,942	0,021908	3,3653
0,03	787,08	1,1998	36,512	19,301	0,032860	2,9601
0,04	440,35	1,1996	27,382	14,481	0,043811	2,6729
0,05	280,02	1,1994	21,903	11,591	0,054759	2,4503
0,06	193,03	1,1991	18,251	9,6659	0,065703	2,2686
0,07	140,66	1,1988	15,642	8,2915	0,076644	2,1152
0,08	106,72	1,1985	13,684	7,2616	0,087580	1,9826
0,09	83,496	1,1981	12,162	6,4613	0,098510	1,8658
0,10	66,922	1,1976	10,944	5,8218	0,10944	1,7616
0,11	54,688	1,1971	9,9466	5,2992	0,12035	1,6676
0,12	45,408	1,1966	9,1156	4,8643	0,13126	1,5819
0,13	38,207	1,1960	8,4123	4,4969	0,14217	1,5034
0,14	32,511	1,1953	7,8093	4,1824	0,15306	1,4309
0,15	27,932	1,1946	7,2866	3,9103	0,16395	1,3636
0,16	24,198	1,1939	6,8291	3,6727	0,17482	1,3009
0,17	21,115	1,1931	6,4253	3,4635	0,18569	1,2423
0,18	18,543	1,1923	6,0662	3,2779	0,19654	1,1872
0,19	16,375	1,1914	5,7448	3,1123	0,20739	1,1353
0,20	14,533	1,1905	5,4554	2,9635	0,21822	1,0864
0,21	12,956	1,1895	5,1936	2,8293	0,22904	1,0400
0,22	11,596	1,1885	4,9554	2,7076	0,23984	$9,9606 \cdot 10^{-1}$
0,23	10,416	1,1874	4,7378	2,5968	0,25063	$9,5428 \cdot 10^{-1}$
0,24	9,3865	1,1863	4,5383	2,4956	0,26141	$9,1451 \cdot 10^{-1}$
0,25	8,4834	1,1852	4,3546	2,4027	0,27217	$8,7660 \cdot 10^{-1}$
0,26	7,6876	1,1840	4,1851	2,3173	0,28291	$8,4040 \cdot 10^{-1}$
0,27	6,9832	1,1828	4,0279	2,2385	0,29364	$8,0579 \cdot 10^{-1}$
0,28	6,3572	1,1815	3,8820	2,1656	0,30435	$7,7268 \cdot 10^{-1}$

# 7

## Изотермско струјање са трећем

Када цеви или канали кроз које струји гас добро проводе топлоту, при струјању се јавља интензивна размена топлоте са околином, тако да је средња температура у попречним пресецима цеви једнака температури околине. Ако је у том случају температура околине константна, струјање гаса је изотермско. У овом делу разматра се стационарно, стишљиво, изотермско струјање кроз цев константног попречног пресека (слика 7.1). Код оваквог струјања узима се у обзир утицај трења на зиду цеви. То значи да су једначина континуитета и количине кретања уз једначину стања довољне за одређивање брзине, притиска и густине.



**Слика 7.1.** Контролна запремина у случају изотермског струјања вискозног гаса у цеви или каналу константног попречног пресека.

Једначина континуитета и количине кретања за контролну запремину обележену на слици испрекиданом линијом су исте као и код адијабатског струјања (6.1) и (6.2). На основу једначине континуитета (6.1) и једначине стања идеалног гаса (2.4) уз релацију  $u = M\sqrt{\varkappa RT}$ , за стационарно, стишљиво изотермско струјање кроз цев константног попречног пресека добијају се следећи односи величина стања у пресецима 1-1 и 2-2:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2}, \quad \frac{T_{01}}{T_{02}} = \frac{2 + (\varkappa - 1)M_1^2}{2 + (\varkappa - 1)M_2^2}, \quad \frac{p_{01}}{p_{02}} = \left(\frac{T_{01}}{T_{02}}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \frac{p_1}{p_2}. \quad (7.1)$$

Када се одреди поље брзине може се из једначине енергије одредити количина

ТАБЕЛА 7: Изотермско струјање са трењем

Дозвучно струјање						
$M$	$\lambda L_m/D_h$	$T_0/T_{0m}$	$p/p_m$	$p_0/p_{0m}$	$u/u_m$	$\Delta s_m/R$
0,00	$\infty$	0,87500	$\infty$	$\infty$	0.00000	$\infty$
0,01	7133,0	0,87502	84,515	52,966	0,011832	4,4369
0,02	1777,2	0,87507	42,258	26,488	0,023664	3,7438
0,03	785,97	0,87516	28,172	17,665	0,035496	3,3383
0,04	439,33	0,87528	21,129	13,255	0,047329	3,0506
0,05	279,06	0,87544	16,903	10,611	0,059161	2,8275
0,06	192,12	0,87563	14,086	8,8493	0,070993	2,6452
0,07	139,79	0,87586	12,074	7,5920	0,082825	2,4910
0,08	105,89	0,87612	10,564	6,6500	0,094657	2,3575
0,09	82,704	0,87642	9,3906	5,9181	0,10649	2,2397
0,10	66,160	0,87675	8,4515	5,3334	0,11832	2,1343
0,11	53,954	0,87712	7,6832	4,8556	0,13015	2,0390
0,12	44,699	0,87752	7,0430	4,4581	0,14199	1,9520
0,13	37,521	0,87796	6,5012	4,1224	0,15382	1,8720
0,14	31,847	0,87843	6,0368	3,8352	0,16565	1,7979
0,15	27,288	0,87894	5,6344	3,5867	0,17748	1,7289
0,16	23,573	0,87948	5,2822	3,3698	0,18931	1,6643
0,17	20,508	0,88006	4,9715	3,1789	0,20115	1,6037
0,18	17,953	0,88067	4,6953	3,0096	0,21298	1,5466
0,19	15,801	0,88132	4,4482	2,8585	0,22481	1,4925
0,20	13,975	0,88200	4,2258	2,7230	0,23664	1,4412
0,21	12,412	0,88272	4,0245	2,6007	0,24848	1,3924
0,22	11,066	0,88347	3,8416	2,4899	0,26031	1,3459
0,23	9,8997	0,88426	3,6746	2,3891	0,27214	1,3014
0,24	8,8830	0,88508	3,5215	2,2970	0,28397	1,2589
0,25	7,9925	0,88594	3,3806	2,2126	0,29580	1,2181
0,26	7,2087	0,88683	3,2506	2,1350	0,30764	1,1788
0,27	6,5160	0,88776	3,1302	2,0635	0,31947	1,1411
0,28	5,9013	0,88872	3,0184	1,9974	0,33130	1,1047