

**УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ**

**Прилог моделирању и динамичкој анализи  
система нецелобројног реда  
са основама рачуна нецелобројног реда**

**Михаило П. Лазаревић  
Љубиша Бучановић**



**Машински факултет  
Београд, 2012**



**Прилог моделирању и динамичкој  
анализи система нецелобројног реда са  
основама рачуна нецелобројног реда**

**Машински факултет  
Универзитет у Београду  
2012**

Др Михаило П. Лазаревић, редовни професор  
Машински факултет, Универзитет у Београду

Мр Љубиша Бучановић,  
Messer -Vor

**Прилог моделирању и динамичкој анализи  
система нецелобројног реда са основама  
рачуна нецелобројног реда**

Монографија  
Monograph

I издање

*Рецензенти*

Др Александар Обрадовић, редовни професор  
Машинског факултета у Београду

Др Томислав Шекара, доцент  
Електротехничког факултета у Београду

*Издавач*

Универзитет у Београду  
Машински факултет Београд  
11000 Београд, Краљице Марије 16

*За издавача*

Др Александар Обрадовић, проф.

*Одобрено за штампу*

Одлуком Декана бр. 191/11 од 1.12.2011.

Београд, 2012

Тираж: 200 примерака

*Штампа: PLАНЕТА print*

ISBN 978-86-7083-747-8

---

Прештампавање, умножавање, фотокопирање или репродукција целе књиге или неких њених делова није дозвољена

Др Михаило Лазаревић • Мр Љубиша Бучановић

*Прилог моделирању и динамичкој анализи  
система нецелобројног реда са основама  
рачуна нецелобројног реда*

Машински факултет  
Универзитет у Београду  
2012



## ***Захвалност***

*Издање ове научне монографије финансијски је помогло  
Министарство за просвету и науку Републике Србије,  
као и фирма НС ЕКО ИНГ, Бор.  
на чему су аутори дубоко захвални.*





*Својој породици на несебичној подршци*  
**М.П.Ј**



**Прилог моделирању и динамичкој анализи система  
нецелобројног реда са основама рачуна нецелобројног реда**



# САДРЖАЈ

1. УВОД, ИСТОРИЈАТ РАЧУНА НЕЦЕЛОБРОЈНОГ РЕДА .....	1
1.1 Увод.....	1
1.2 Фракциони рачун кроз историју .....	2
2. ОСНОВЕ РАЧУНА НЕЦЕЛОБРОЈНОГ РЕДА .....	14
2.1 Специјалне функције .....	14
2.2 Рачун нецелобројног реда .....	27
2.2.1 Рачун целобројног реда (класични интегрални рачун).....	27
2.2.2 Рачун нецелобројног реда према дефиницији Риман-Лиувила .	30
2.2.3 Рачун нецелобројног реда према дефиницији Капута .....	38
2.2.4 Рачун нецелобројног реда према дефиницији Грунвалд-Летникова.....	39
2.2.5 Остале особине оператора нецелобројног реда-Риман-Лиувилев,Капутов, Грунвалд-Летников .....	40
2.2.6 Диференцијалне једначине нецелобројног реда-Риман-Лиувилев,Капутов тип.....	49
3. УПРАВЉАЊЕ СИСТЕМОМ ПРИМЕНОМ ИТЕРАТИВНОГ УПРАВЉАЊА УЧЕЊЕМ НЕЦЕЛОБРОЈНОГ РЕДА, АЛГОРИТМИ УПРАВЉАЊА ПИД-А НЕЦЕЛОБРОЈНОГ РЕДА .....	52
3.1 Основни појмови итеративног управљања учењем .....	52
3.1.1 Алгоритам ПД итеративног управљања учењем у комбинацији са управљањем у повратној спрези .....	54
3.2 Итеративно управљање учењем нецелобројног реда .....	58
3.2.1 $D^\alpha$ -тип итеративног управљања учењем нецелобројног реда..	58
3.3 Основе управљања применом ПИД алгоритама управљања нецелобројног реда .....	67
3.3.1 ПИД алгоритам управљања: конвенционални- целобројног реда и нецелобројног реда .....	67
3.3.2 Преносна функција нецелобројног реда,апроксимација .....	75

4. СТАБИЛНОСТ СИСТЕМА НЕЦЕЛОБРОЈНОГ РЕДА СА И БЕЗ КАШЊЕЊА .....	84
4.1 Основни појмови система са кашњењем .....	84
4.2 Љапуновска стабилност система са кашњењем .....	90
4.2.1 Услови стабилности линеарних система са кашњењем у временском домену .....	91
4.3 Практична стабилност и стабилност система са кашњењем на коначном временском интервалу .....	93
4.4 Стабилност система нецелобројног реда.....	101
4.4.1 Увод у стабилност система нецелобројног реда.....	101
4.4.2 Прелиминарна разматрања за системе са кашњењем нецелобројног реда.....	121
4.4.3 Стабилност на коначном временском интервалу система нецелобројног реда са и без кашњења .....	134
5. НЕКИ ПРИМЕРИ ПРИМЕНЕ РАЧУНА НЕЦЕЛОБРОЈНОГ РЕДА У ТЕОРИЈИ ЕЛЕКТРОВИСКООЕЛАСТИЧНОСТИ И БИОМЕДИЦИНСКОМ ИНЖЕЊЕРСТВУ .....	172
5.1 Модели финих дисперзних система у теорији електро-вискоеластичности: приступ применом рачуна нецелобројног реда .....	172
5.1.1 Електрохидродинамика развијених течност – течност граничних фаза: системи описани диференцијалним једначинама са изводима нецелобројног реда.....	173
5.2 Одређивање биореолошког модела коже применом рачуна дистрибуираног нецелобројног реда.....	189

## ДОДАЦИ

<b>Додатак А.</b> - Неки изводи из анализе- $L^p$ простори и простори апсолутно непрекидних и непрекидних функција .....	200
<b>Додатак Б.</b> - Листа Лапласових и инверзних Лапласових трансформација које се односе на рачун нецелобројног реда .....	203
<b>Додатак Ц.</b> - Нормирани векторски простори .....	205
<b>Додатак Д.</b> - Неки изводи из теорије диференцијалних једначина са помереним аргументима .....	208
<b>Додатак Е.</b> - Bellman-Gronwall-ова лема .....	210
<b>ЛИТЕРАТУРА</b> .....	212





## ПРЕДГОВОР

Већ више од тридесет година примена рачуна нецелобројног реда (*fractional calculus*) привлачи пажњу научне и стручне јавности широм света. Сами корени рачуна нецелобројног реда сежу до краја 17. века и везују се за кореспонденцију која је остварена између Лопитала и Лајбница, и то у време када су Њутн и Лајбниц постављали основе диференцијалног и интегралног рачуна.

Касније, овом рачуну је посвећивана извесна пажња од стране многих познатих научника тог доба све до двадесетог века, међу којима су Ојлер, Риман, Лиувил, Абел, Фурије. Тек од седамдесетих година двадесетог века, долази до пуног развоја примене рачуна нецелобројног реда са тенденцијом непрекидног раста примене по обиму и броју публикованих научних радова, књига, конференција...

Примена и присуство рачуна нецелобројног реда у свим гранама науке и технике више је него евидентно јер омогућава да се уочени системи квалитетније, боље моделирају, односно развију и примене квалитетнији системи управљања и у том смислу бројни научни радови и обимна публицистичка делатност у пуној мери су исказали интерес који је за њих био показан.

У математичком смислу, за разлику од „класичног“ диференцијалног и интегралног рачуна, овде степен може бити реалан односно комплексан број, тако да су одговарајући оператори диференцирања и интеграљења нелокални оператори и дати системи се сад могу описати са диференцијалним једначинама али нецелобројног реда тако да систем има више степени слободе. У специјалном случају када је степен целобројан онда се претходни оператори свODE на „класичне“ операторе диференцирања и интеграљења.

Такође, системи описани диференцијалним једначинама нецелобројног реда могу описати меморијске ефекте као и наследне особине система, које су карактеристика највећег броја вискоеластичних, биореолошких као и одговарајућих реалних техничких система.

Ова монографија је настала првенствено као плод десетогодишњег бављења првопотписаног аутора проблематиком примене рачуна нецелобројног реда на поједине класе система са кашњењем. У том смислу она представља и логичан наставак, раније започетих интересовања за ове системе, инициран научним радовима у којима су дата нова научна сазнања за дату класу система а посебно о њиховим динамичким особинама исказаним кроз концепте стабилности на коначном временском интервалу. Такође, доприноси ове монографије настали су и као резултат рада оба аутора на проблемима управљања меатроничким (роботским) системима применом итеративног управљања учењем базирани на рачуну нецелобројног реда као и примене новоразвијених ПИД алгоритма, тзв. ПИД алгоритма нецелобројног реда -  $PI^\alpha D^\beta$  на одговарајуће техничке системе.

Исто тако, резултати су остварени и у моделирању одговарајућих финих дисперзних система у оквиру актуелне теорије електровискоеластичности, односно, добијени су и неки резултати који се односе на моделирање биореолошких система-људске коже применом рачуна нецелобројног реда што је резултирало у низу радова објављених у међународним часописима и/или саопштених на интернационалним симпозијумима и конференцијама.

*Како на нашем језику готово да не постоји одговарајућа литература која се односи на рачун нецелобројног реда, из педагошких разлога у уводном делу дат је скраћени приказ историјског развоја рачуна нецелобројног реда, односно у наставку и основе рачуна нецелобројног реда.*

*У већини случајева, пажљиво одабраним примерима олакшано је разумевање и савлађивање изложеног градива. Изложена материја подржава актуелне трендове у овај области и представља селективан текст који садржи и нека теоретска знања преузета из савремених уџбеника из ове области а све са циљем да се заинтересованом читаоцу омогући лакши и непосреднији приступ овој сложеној проблематици.*

*Имајући значај развоја и примене рачуна нецелобројног реда, ова монографија ће по свом садржају заинтересовати сигурно и стручњаке специјализоване, не само за теоријски већ и за истраживачки и практичан рад, па ће аутори бити захвални на свим сугестијама у погледу побољшања квалитета њеног садржаја.*

*Др Александру Обрадовићу, редовном професору Машиног факултета Универзитета у Београду, и др Томиславу Шекари, доценту Електротехничког факултета Универзитета у Београду, захваљујемо се на корисним сугестијама и труду око рецензије ове монографије.*

*За показани велики ентузијазам и рад око техничке обраде књиге захвални смо колеги Радомиру Матејићу, апсолвенту Машиног факултета у Београду.*

*А у т о р и*

*Београд, април 2012. год.*