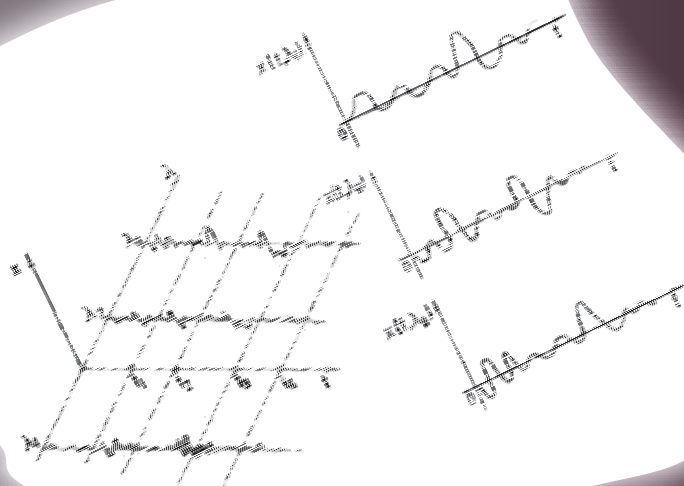


LINEARNI STOHAŠTIČKI SISTEMI

Dragutin Lj. Debeljković



Dr Dragutin Lj. Debeljković

LINEARNI STOHASTIČKI SISTEMI

**Mašinski fakultet
Univerziteta u Beogradu
2014**

Dr **Dragutin Lj. Debeljković**, redovni profesor
Mašinski fakultet - Univerzitet u Beogradu

Linearni stohastički sistem

Udžbenik

I izdanje

Recenzenti

Dr Zoran Ribar, redovni profesor
Mašinskog fakulteta u Beogradu

Dr Srđan Ribar, docent
Mašinskog fakulteta u Beogradu

Izdavač

Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet Beograd
11000 Beograd, Kraljice Marije 16

Za izdavača

Dr Aleksandar Obradović, prof.

Odobreno za štampu

odlukom *Dekana* br. 265/14 od 06.03.2014. godine.

Beograd, 2014

Tiraž: 100 primeraka

Štampa *PLANETA print*

ISBN 978-86-7083-822-2

*Preštampavanje, umnožavanje, fotokopiranje
ili reprodukcija cele knjige ili nekih njenih delova nije dozvoljena*

Dr Dragutin Lj. Debeljković

LINEARNI STOHAŠTIČKI SISTEMI

**Mašinski fakultet
Univerziteta u Beogradu
2014**

**LINEARNI
STOHASTIČKI SISTEMI**

Predgovor

Linearni sistemi su oduvek privlačili pažnju naučne i stručne javnosti i taj interes postoji i dan danas i zaokuplja sve tehničke discipline podržan snažnim matematičkim aparatom osnovanim na odabranim poglavljima linearne algebre, operatorskog računa i teorije diferencijalnih jednačina, sa i bez pomerenog argumenta, što im neosporno daje veliki značaj, pa je samim tim prirodno da se još jednom nađu u stvarnoj žiži interesovanja a sa nekih drugih aspekta njihovog dinamičkog delovanja i ponašanja.

Udžbenik *Linearni stohastički sistemi* sadrži i obuhvata osnovne postavke analize i sinteze stohastičkih sistema automatskog upravljanja i namenjena je širem krugu čitalaca čija je oblast interesovanja i istraživanja vezana za ovu klasu sistema i uopšte teoriju i praksu automatskog upravljanja.

Imajući u vidu sve strožije zahteve koji se nameću sistemima automatskog upravljanja u pogledu kvaliteta njihovog dinamičkog ponašanja kao i činjenicu da su isti izloženi nepredvidljivim dejstvima spoljašnjih uticaja, koji po pravilu imaju slučajan karakter, više nego očigledno je da se samo prilazom sa statističkih pozicija može tretirati ova složena problematika.

S obzirom na sve veću ekspanziju automatskog upravljanja u svim oblastima tehnike ovakav prilaz u potpunosti je opravdan, jer verno odslikava dinamiku razmatranih sistema automatskog upravljanja.

Izložena materija se u najvećoj meri oslanja na teoriju verovatnoće i matematičke statistike pa je stoga uvodni deo posvećen rekapitulaciji znanja iz ove oblasti sa blagim usmeravanjem ka suštinski, neophodnim pojmovima.

Materija koja obuhvata izlaganja vezana za stohastičke procese ima za cilj da čitaoca pripremi i uvede u analizu, sintezu i estimaciju stohastičkih sistema.

U odnosu na postojeće udžbenike autora, iz ove oblasti, uneta su znatna proširenja kako u pogledu spoznaje nove klase sistema opisanih stohastičkim diferencijalnim i diferencnim jednačinama, tako i u pogledu proširenja estimacionih procedura na posebne klase vremenski nestacionarnih sistema automatskog upravljanja.

Mimo toga jedno obimno poglavlje posvećeno je primeni izložene teorije na praktične primere iz prakse.

U tom smislu razmatrana je dinamika jednog vozila pri kretanju po stohastičkoj podlozi, određene su tzv. mape oscilovanja, koje jasno ukazuju na sve posledice jednog takvog puta kao i na mesta u vozilu gde je taj uticaj manje ili više izražen, što omogućava projektantu da izabere mesta na kojima će se putnici, tokom vožnje, ugodno osećati.

Da bi se čitaocu olakšalo praćenje gradiva, dati su u prilogama izvodi iz teorije ocena, matričnog i operatorskog računa kao i brojni primeri koji algoritamski prezentuju izložene metode analize i sinteze sistema.

Knjiga je pisana po ugledu na savremene udžbenike iz ove oblasti, koji se prvenstveno mogu naći na engleskom i ruskoj jeziku.

Ova knjiga će po svom sadržaju zainteresovati i stručnjake koji se bave istraživačkim i praktičnim radom, pa će autor biti zahvalan na novim sugestijama u pogledu daljeg poboljšanja kvaliteta sadržaja.

Dr Zoranu Ribaru, redovnom profesoru Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, i *Dr Srđanu Ribaru*, *docentu* Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu zahvaljujem se na korisnim sugestijama i trudu oko recenzije.

A u t o r

Beograd, april 2014. god.

SADRŽAJ

OPŠTI DEO

I OPŠTA PITANJA TEORIJE VEROVATNOĆE I MATEMATIČKE STATISTIKE

1. UVODNA RAZMATRANJA	1
Literatura	6
2. ELEMENTI TEORIJE VEROVATNOĆE	7
Literatura	10
3. SLUČAJNE PROMENLJIVE	11
3.1 Jednodimenzionalna i višedimenzionalna slučajna promenljiva	11
3.2 Funkcije slučajnih promenljivih	21
3.3 Parametri ili brojne karakteristike slučajnih promenljivih	25
3.4 Nezavisnost, korelativnost i ortogonalnost slučajnih promenljivih	32
Literatura	34

4. STOHAŠTIČKI PROCESI	35
4.1 Analiza stohastičkih procesa u vremenskom domenu	35
4.1.1 Parametri ili brojne karakteristike stohastičkih procesa	41
4.1.2 Korelativnost i ortogonalnost stohastičkih procesa	44
4.1.3 Stacionarnost i ergodičnost stohastičkih procesa	44
4.1.4 Neprekidnost, diferencijalnost i integrabilnost stohastičkih procesa	55
4.2 Analiza stohastičkih procesa u frekventnom domenu	61
4.3 Vrste stohastičkih procesa	78
Literatura	82

ANALIZA I SINTEZA DINAMIČKOG PONAŠANJA LINEARNIH SISTEMA PRI DEJSTVU STOHAŠTIČKIH ULAZNIH SIGNALA

II ANALIZA DINAMIČKOG PONAŠANJA LINEARNIH STACIONARNIH SISTEMA

5. ANALIZA STACIONARNIH VREMENSKI NEPREKIDNIH LINEARNIH STOHAŠTIČKIH SISTEMA	83
5.1 Analiza stacionarnih jednostruko prenosnih sistema u vremenskom domenu	83
5.2 Analiza stacionarnih jednostruko prenosnih sistema u frekventnom domenu	87
5.3 Analiza višestruko prenosnih sistema u prostoru stanja	91
5.4 Analiza sistema sa stanovišta srednjekvadratne greške	106
5.4.1 Kriterijumi za ocenu kvaliteta ponašanja sistema	107
5.4.2 Izraz za sračunavanje srednjekvadratne vrednosti greške u vremenskom domenu	110
5.4.3 Izraz za sračunavanje srednjekvadratne vrednosti greške u frekventnom domenu	114
5.4.4 Metode za sračunavanje srednjekvadratne vrednosti greške	118
Literatura	125

III SINTEZA DINAMIČKOG PONAŠANJA LINEARNIH STACIONARNIH SISTEMA

6. SINTEZA VREMENSKI NEPREKIDNIH LINEARNIH STOHAŠTIČKIH SISTEMA	127
6.1 Sinteza optimalnih vrednosti podešljivih parametara sistema fiksne strukture	128
6.2 Sinteza sistema	131
6.2.1 Postavka problema	131
6.2.2 Fizička ostvarljivost sistema	132
6.2.3 Zahtevi pri sintezi	134
6.3 Sinteza sistema u vremenskom domenu	140
6.3.1 Sinteza idealnog sistema	140
6.3.1.1 Jednostruko prenosni stacionarni sistem; Viner – Hopfova jednačina	141
6.3.1.2 Višestruko prenosni nestacionarni sistem; Viner – Hopfova matrična jednačina	146
6.3.2 Metode za rešavanje Viner – Hopfove jednačine	149
6.3.2.1 Opšte rešenje Viner – Hopfove jednačine	149
6.3.2.2 Rešenje Viner – Hopfove jednačine za posebnu klasu korelacionih funkcija	157
6.3.3 Sinteza optimalnih sistema	161
6.3.3.1 Filteri za uobličavanje signala	161
6.3.3.2 Postupak sinteze optimalnog sistema	167
6.4 Sinteza sistema u frekventnom domenu	176
6.4.1 Sinteza idelnog sistema: postupak Bode – Šanon	177
6.4.2 Sinteza optimalnog sistema	181
6.5 Sinteza sistema u kompleksnom domenu	187
6.5.1 Sinteza jednostruko prenosnih sistema	187
6.5.2 Sinteza višestruko prenosnih sistema	191
Literatura	195

ESTIMACIJA STANJA LINEARNIH SISTEMA PRI DEJSTVU STOHAŠTIČKIH ULAZNIH SIGNALA

IV ESTIMACIJA STANJA LINEARNIH NESTACIONARNIH I STACIONARNIH SISTEMA

7. ESTIMACIJA STANJA VREMENSKI NEPREKIDNIH, LINEARNIH, STOHAŠTIČKIH SISTEMA	197
7.1 Kalman – Busijev filter	198
7.1.1 Postavka problema	198
7.1.2 Rešenje problema	200
7.2 Ekvivalentnost Kalman – Busijevog i Vinerovog filtera za stacionarni problem	213
Literatura	220
8. ESTIMACIJA STANJA VREMENSKI PREKIDNIH, LINEARNIH, STOHAŠTIČKIH SISTEMA	221
8.1 Uvodna razmatranja	221
8.2 Kalman – Busijev linearni diskretni filter	222
8.2.1 Uvodna razmatranja	222
8.2.2 Ortogonalne projekcije	225
8.2.3 Glavni rezultat	227
Literatura	244

STOHAŠTIČKE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

V STOHAŠTIČKE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KAO VERODOSTOJNI MATEMATIČKI MODELI VREMENSKI NEPREKIDNIH I PREKIDNIH SISTEMA

9. STOHAŠTIČKE	
INTEGRALNE I DIFERENCIJALNE JEDNAČINE	245
9.1 Vremeski neprekidni (kontinualni) sistemi	245
9.1.1 Beli šum	245
9.1.2 Vinerov proces	249
9.1.3 Stohastičke integralne i diferencijalne jednačine	251
9.1.4 Propagacija matematičkog očekivanja i varijanse kroz nelinearni sistem	269
9.2 Vremenski prekidni (diskretni) sistemi	279
9.2.1 Opšte o diskretnim sistemima	279
9.2.2 Veza između diskretnih i kontinualnih procesa	284
9.2.3 Varijansa i srednja vrednost slučajne promenljive za nelinearne sisteme	286
Literatura	288

PRIMENA REZULTATA TEORIJE STOHAŠTIČKIH LINEARNIH SISTEMA NA PRIMERE IZ PRAKSE

VI PRIMENA TEORIJSKIH REZULTATA U ANALIZI I SINTEZI UPRAVLJANJA OBJEKATA I PROCESA

10. DINAMIKA PUTNIČKOG VOZILA U PRISUSTVU STOHAŠTIČKIH POBUDA	289
10.1 Uvodna razmatranja	289
10.2 Matematički model vozila	291
11. OCENA EFIKASNOSTI SISTEMA OSLANJANJA	301
11.1 Vozilo kao objekat upravljanja	301
11.2 Proces oscilovanja vozila	310

12. PROVERA ADEKVATNOSTI MODELA	316
12.1 Uslovi ispitivanja	316
12.2 Estimacija ulaznog vektora	318
12.3 Prenosna funkcija vozila	324
Literatura	328

DODACI

DODATAK A – Oznake	329
DODATAK B – Osobine gausove raspodele	335
DODATAK C – Karakteristična funkcija	363
DODATAK D – Eksperimentalno određivanje autokorelacione funkcije i spektra gustine snage	366
DODATAK E – Elementi teorije ocena.	370
DODATAK F – Dvostrana Laplasova transformacija	374
DODATAK G – Klasa ortogonalnih funkcija	378
DODATAK H – Tablica integrala za sračunavanje srednjekvadratne vrednosti greške	383
DODATAK I – Lema ortogonalnih projekcija	384
DODATAK J – Inverzna matična lema	387
DODATAK K – Urađeni primeri	389
PRILOG A - Estimacija stanja sistema sa nepoznatim kovarijansama šuma	419
PRILOG B - Određivanje matrice pojačanja optimalnog filtera za slučaj delovanja “obojenog” šuma	427

LITERATURA

437