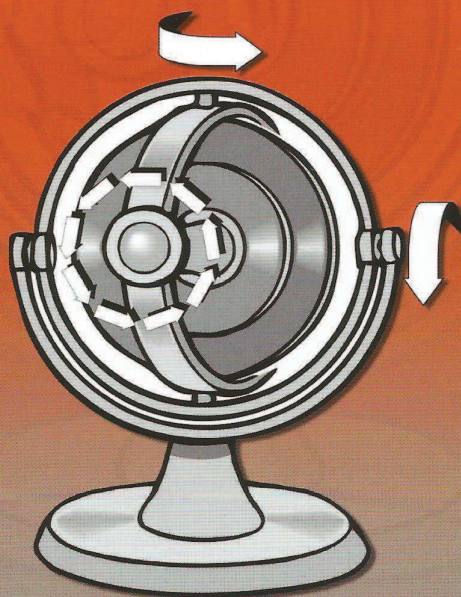


УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Никола С. Младеновић
Наташа Р. Тришовић

ДИНАМИКА



МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ
Београд, 2021.

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Никола С. Младеновић
Наташа Р. Тришовић

ДИНАМИКА

МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ
Београд, 2021.

Динамика
Треће издање

Аутори:

Др **Никола Младеновић**, редовни професор
Машинског факултета Универзитета у Београду
Др **Наташа Тришовић**, редовни професор
Машинског факултета Универзитета у Београду

Рецензенти:

Др **Драгомир Зековић**, редовни професор у пензији
Машинског факултета Универзитета у Београду
Др **Мирко Павишић**, редовни професор у пензији
Машинског факултета Универзитета у Београду
Др **Оливера Јеремић**, редовни професор
Машинског факултета Универзитета у Београду

Лектор:

Светлана Илијић, дипломирани филолог

Издавач:

Машински факултет Универзитета у Београду
Краљице Марије 16, 11120 Београд 35, Србија
<http://www.mas.bg.ac.rs/>

За издавача:

Др **Радивоје Митровић**, декан
редовни професор Машинског факултета Универзитета у Београду

Уредник

Др **Милан Лечић**, редовни професор
Председник Комисије за издавачку делатност
Машинског факултета Универзитета у Београду

Штампање трећег издања одобрила:

Комисија за издавачку делатност Машинског факултета у Београду и Декан Машинског факултета у Београду Одлуком бр. 14/2021 од 21. 06. 2021. године.

Компјутерски слог и графичка обрада:

Аутори

Штампа:

Планета Принт
Игора Васиљева 33р, Београд
<http://planeta-print.rs/>
Тел: +381 650 65 64

Тираж: 300 примерака
ISBN 978-86-6060-076-1

©Аутори и Машински факултет, Београд, 2021
Прештампавање и умножавање није дозвољено

Садржај

Предговор	9
Увод	11
1 Диференцијалне једначине кретања слободне материјалне тачке	13
Увод	13
1.1 Векторски поступак одређивања кретања слободне материјалне тачке	15
1.2 Координатни поступак одређивања кретања слободне материјалне тачке	15
1.2.1 Диференцијалне једначине кретања у Декартовим координатама	15
1.2.2 Диференцијалне једначине кретања у поларним и поларно-цилиндричним координатама	16
1.2.3 Диференцијалне једначине кретања у сферним координатама	17
1.2.4 Диференцијалне једначине кретања у криволинијским координатама	18
1.3 Природни поступак одређивања кретања слободне материјалне тачке	18
1.4 Први задатак динамике материјалне тачке	19
1.5 Други задатак динамике материјалне тачке	20
1.6 Праволинијско кретање материјалне тачке	21

1.6.1	Сила која дејствује на материјалну тачку зависи само од времена	24
1.6.2	Сила која дејствује на материјалну тачку зависи само од брзине тачке	24
1.6.3	Сила која дејствује на материјалну тачку зависи само од положаја тачке	25
2	Динамика везане материјалне тачке	27
	Везе, подела веза, аксиома о везама	27
2.1	Услов за брзину материјалне тачке при кретању по вези	29
2.2	Услов за убрзање материјалне тачке при кретању по вези	31
2.3	Услови за брзину и убрзање код незадржавајућих веза	32
2.4	Кретање везане материјалне тачке са једном задржавајућом везом	33
2.5	Реакција незадржавајућих веза	35
2.6	Диференцијалне једначине кретања везане материјалне тачке у Декартовим координатама. Лагранжеве једначине прве врсте	35
2.6.1	Кретање тачке по идеално глаткој површи	35
2.6.2	Кретање тачке по идеално глаткој линији	37
2.6.3	Кретање тачке по храпавој површи	40
2.6.4	Кретање тачке по храпавој линији	40
2.7	Диференцијалне једначине кретања материјалне тачке у природним координатама. Ојлерове једначине	41
2.7.1	Кретање тачке по глаткој вези	42
2.7.2	Кретање тачке по реалној вези	43
2.8	Даламберов принцип за везану материјалну тачку	44
3	Праволинијске осцилације материјалне тачке	46
	Уводна разматрања	46
3.1	Слободне непригушене осцилације материјалне тачке	47
3.1.1	Слободне осцилације тачке у вертикалној равни	50
3.2	Слободне пригушене осцилације материјалне тачке	51
3.2.1	Слободне пригушене осцилације материјалне тачке под дејством силе отпора сразмерне првом степену брзине	52
3.2.2	Слободне пригушене осцилације материјалне тачке при постојању отпора услед сувог трења	59

3.3	Принудне непригушене осцилације материјалне тачке	64
3.3.1	Резонанца	67
3.3.2	Подрхтавање	68
3.3.3	Динамички фактор појачања код принудних непригушених осцилација	69
3.4	Принудне пригушене осцилације материјалне тачке	71
3.4.1	Принудне пригушене осцилације материјалне тачке под дејством силе отпора пропорционалне првом степену брзине тачке	71
3.4.2	Динамички фактор појачања код принудних пригушених осцилација материјалне тачке	75
3.5	Развијање произвољне функције принудне силе у Фуријеов ред	77
3.6	Принудне осцилације под дејством произвољне принудне силе	82
4	Опште теореме динамике материјалне тачке	86
4.1	Импулс силе	86
4.2	Количина кретања материјалне тачке	89
4.2.1	Теорема о промени количине кретања материјалне тачке	89
4.2.2	„Закон” о одржању количине кретања материјалне тачке	91
4.3	Кинетички момент материјалне тачке	92
4.3.1	Теорема о промени кинетичког момента материјалне тачке за пол	93
4.3.2	„Закон” о одржању кинетичког момента материјалне тачке за пол	95
4.3.3	Теорема о промени кинетичког момента за осу	95
4.3.4	„Закон” о одржању кинетичког момента материјалне тачке за осу	98
4.4	Рад и снага силе	99
4.4.1	Рад силе на елементарном померању	99
4.4.2	Рад силе на коначном померању	101
4.4.3	Рад силе Земљине теже, централне силе и силе трења	102
4.4.4	Снага силе	106
4.5	Кинетичка енергија материјалне тачке	106
4.5.1	Теорема о промени кинетичке енергије материјалне тачке	107
4.6	Поље сила. Потенцијално поље сила	108
4.6.1	Потенцијална енергија. Укупна механичка енергија	116

4.6.2	Примери одређивања потенцијала	117
5	Кретање тачке под дејством централне силе	119
5.1	Централна сила	119
5.1.1	Диференцијалне једначине кретања тачке под дејством централне силе	121
5.1.2	Бинеова једначина	122
5.1.3	Кретање тачке под дејством Њутнове гравитационе силе	123
5.2	Кеплерови закони	126
5.3	Трајекторије вештачких Земљиних сателита	128
6	Динамика релативног кретања материјалне тачке	130
6.1	Диференцијална једначина релативног кретања материјалне тачке	130
6.2	Теорема о промени кинетичке енергије при релативном кретању материјалне тачке	133
6.3	Принцип релативности класичне механике	134
6.4	Релативно мировање материјалне тачке	135
6.5	Скретање тачке ка истоку при слободном паду на Земљу	138
6.6	Фукоово клатно	141
7	Динамика тачке променљиве масе	144
7.1	Једначина Мешчерског	144
7.1.1	Специјални случајеви једначине Мешчерског . . .	147
7.2	Задаци Циолковског	149
7.2.1	Први задатак	149
7.2.2	Други задатак	152
8	Динамика материјалног система и крутог тела	154
8.1	Материјални систем. Подела сила материјалног система	154
8.2	Геометрија маса	156
8.2.1	Маса материјалног система. Центар маса материјалног система	156
8.3	Моменти инерције материјалног система	158
8.3.1	Поларни, аксијални и планарни моменти инерције	158
8.3.2	Зависност момента инерције материјалног система у односу на две паралелне осе. Хајгенс-Штајнерова теорема	163

8.3.3	Одређивање момента инерције материјалног система у односу на произвољну осу која пролази кроз задату тачку	164
8.3.4	Елипсоид инерције. Главне осе и главни моменти инерције	167
8.3.5	Особине главних и главних централних оса инерције	171
8.3.6	Одређивање аксијалног момента инерције за произвољну осу	173
9	Опште теореме динамике материјалног система	175
9.1	Диференцијалне једначине кретања материјалног система	175
9.2	Теорема о кретању центра маса материјалног система	176
9.2.1	„Закон” о одржању кретања центра маса материјалног система	177
9.3	Количина кретања материјалног система	178
9.3.1	Теорема о промени количине кретања материјалног система	179
9.3.2	„Закон” о одржању количине кретања материјалног система	181
9.4	Кинетички момент материјалног система	182
9.4.1	Веа кинетичког момента материјалног система у односу на пол и кинетичког момента у односу на центар маса система	184
9.4.2	Теорема о промени кинетичког момента материјалног система за тачку	190
9.4.3	„Закон” о одржању кинетичког момента материјалног система за тачку	192
9.4.4	Кинематичка интерпретација теореме о промени кинетичког момента	193
9.4.5	Теорема о промени кинетичког момента материјалног система за осу	194
9.4.6	„Закон” о одржању кинетичког момента материјалног система за осу	197
9.5	Кинетичка енергија материјалног система	197
9.5.1	Одређивање кинетичке енергије при произвољном кретању материјалног система	198
9.6	Рад сила материјалног система	203
9.6.1	Рад унутрашњих сила	203
9.6.2	Рад спољашњих сила неизмењивог материјалног система	204
9.6.3	Поље силе. Потенцијално поље сила	207
9.6.4	Рад силе у хомогеном пољу Земљине теже	209

9.6.5	Рад момента отпора котрљању	210
9.7	Теорема о промени кинетичке енергије материјалног система	212
9.7.1	„Закон” о одржању енергије	213
9.8	Даламберов принцип и примена на везани материјални систем	214
9.8.1	Одређивање главног вектора и главног момента сила инерције	216
10	Динамика крутог тела	220
	Основни задаци динамике крутог тела	220
10.1	Диференцијалне једначине општег кретања крутог тела	220
10.1.1	Диференцијалне једначине сферног кретања крутог тела	224
10.1.2	Диференцијалне једначине равног кретања крутог тела	226
10.1.3	Диференцијалне једначине обртања крутог тела око непокретне осе	226
10.1.4	Диференцијалне једначине транслаторног кретања крутог тела	228
10.2	Примери везани за специјалне случајеве кретања крутог тела	229
10.2.1	Одређивање укупних реакција у лежиштима при обртању крутог тела око непокретне осе . . .	229
10.2.2	Физичко клатно	232
10.2.3	Експериментално одређивање момената инерције	235
10.3	Ојлеров случај обртања крутог тела око непокретне тачке	237
10.3.1	Стабилност обртања крутог тела око главних оса инерције	243
10.4	Лагранжев случај обртања око непокретне тачке	245
10.5	Обртање крутог тела око непокретне тачке. Случај Ковалевске	251
10.6	Приближна теорија гироскопских појава. Кинетички момент гироскопа	253
10.6.1	Уравнотежени гироскоп са три степена слободе .	255
10.6.2	Регуларна прецесија тешког гироскопа	257
10.6.3	Гироскоп са два степена слободе. Гироскопски ефекат	258
11	Елементи аналитичке механике	262
11.1	Везе материјалног система	262
11.2	Генералисане координате	267

11.2.1	Генералисане брзине и убрзања	269
11.3	Виртуална померања материјалног система	269
11.3.1	Варијација координата	269
11.3.2	Виртуално, могуће и стварно померање	271
11.3.3	Број степена слободe	276
11.3.4	Рад сила на виртуалном померању	276
11.3.5	Идеалне везе. Реакције идеалних веза	277
11.3.6	Генералисане силе	280
11.4	Лагранжев принцип виртуалних померања - општа једначина статике	283
11.4.1	Општа једначина статике у генералисаним координатама	287
11.5	Лагранж-Даламберов принцип виртуалних померања - општа једначина динамике	289
11.5.1	Лагранжеве једначине прве врсте	291
11.5.2	Општа једначина динамике у генералисаним координатама	291
11.6	Лагранжеве једначине друге врсте	293
11.6.1	Кинетичка енергија изражена помоћу генералисаних брзина и координата	295
11.6.2	Лагранжеве једначине друге врсте за конзервативне системе	297
11.6.3	Циклична координата и њен интеграл	298
12	Теорија удара	299
12.1	Појава удара. Ударна сила. Ударни импулс	299
12.1.1	Теорема о промени количине кретања материјалне тачке при удару	301
12.2	Теорема о промени количине кретања материјалног си- стема при удару	302
12.3	Теорема о промени кинетичког момента материјалног система при удару	304
12.4	Удар материјалне тачке у непокретну површ. Коефици- јент реституције	306
12.5	Удар тачке о покретну површ	309
12.6	Одређивање ударних реакција тела које се обрће око непокретне осе	311
12.6.1	Центар удара	312
12.7	Удар два тела при општем кретању	314
12.8	Примена Лагранжевих једначина друге врсте у теорији удара	319
12.9	Теорема Остроградског-Карноа о промени кинетичке енергије при удару	321

Литература	325
Индекс	328

Предговор

Непосредан повод за издавање ове публикације није проистекао из потребе да се њоме попуни недостатак оваквих издања у домаћој стручној литератури, већ да се допуном и проширењем анализе неких научних области студентима омогући да употпуне своје теоријско знање. Заједно са књигом МЕХАНИКА–II (КИНЕМАТИКА), овај уџбеник чини заокружену целину потребну за праћење наставног плана и програма предмета МЕХАНИКА 2 и МЕХАНИКА 3 основних академских студија, као и предмета МЕХАНИКА M мастер академских студија Машинског факултета Универзитета у Београду. Поједина поглавља могу олакшати и праћење курса МЕХАНИКА Д на докторским академским студијама поменутог факултета. Поред тога што је књига првенствено намењена студентима машинских факултета, она може бити од користи и студентима осталих техничких факултета и виших машинских школа.

При излагању материје задржана је уобичајена подела динамике, на основу које је садржај књиге подељен на две целине: Динамику материјалне тачке и Динамику материјалног система, са укупно дванаест поглавља. У циљу избегавања непотребног понављања сличних поступака, приступ градиву у неким поглављима је дедуктиван, што је значајно допринело умањењу обима тих тематских целина.

Аутори су водили рачуна да су на нашем језику расположиве бројне збирке задатака из области теоријске и примењене механике, односно динамике, што је утицало на њихову одлуку да примерима допунски не оптерећују садржај ове књиге. Студенти се упућују да избором збирке задатака из области које теоријски обрађује ова књига примене стечено знање и припреме се за полагање испита.

На овај начин аутори желе да изразе своју дубоку захвалност рецензентима, проф. др Драгомиру Зековићу, проф. др Мирку Павишићу и проф. др Оливери Јеремић, на великој помоћи и уложеном труду при прегледу рукописа и настојању да корисним саветима допринесу бољем садржају и изгледу ове књиге.

Текст је прочитала Светлана Илијић, дипломирани филолог, којој се

аутори такође захваљују на залагању у жељи да уџбеник буде у складу са правописом нашег језика.

За све евентуалне штампарске и техничке грешке одговорни су аутори, који ће бити захвални свима који упуте корисне коментаре, сугестије или исправке грешака.

АУТОРИ

у Београду,
септембар 2015.

12.5 Удар тачке о покретну површ

Ако је површ у коју удара материјална тачка M масе m нестационарна, тада се ова веза аналитички дефинише неједначином:

$$f(x, y, z; t) \geq 0. \quad (12.39)$$

Када се тачка налази на вези, њене координате морају задовољавати услов:

$$f(x, y, z; t) = 0. \quad (12.40)$$

Да би се одредио тренутак додира T_1 тачке и површи, довољно је коначне једначине кретања тачке:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{и} \quad z = z(t) \quad (12.41)$$

заменили у релацију (12.40), тј.

$$f[x(t), y(t), z(t); t] = f(t) = 0, \quad (12.42)$$

и наћи корене тако добијене једначине. Најмањи реални и позитивни корен одређује тренутак T_1 додира тачке и површи.

Даље кретање тачке зависи од тога да ли су њене коначне једначине кретања у тренутку $t = T_1$ сагласне са условима које намеће веза. Ако су задовољени услови (2.8) из поглавља 2.1, тј.

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=T_1} = 0, \quad \left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_{t=T_1} = 0, \dots, \left(\frac{d^n f}{dt^n}\right)_{t=T_1} = 0, \dots, \quad (12.43)$$

тачка остаје на вези. Уколико је макар један од наведених извода позитиван, тачка оставља везу у тренутку $t = T_1$. У оба поменута случаја не долази до појаве удара. Удар настаје уколико коначне једначине кретања тачке у тренутку $t = T_1$ доводе до релације:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=T_1} < 0, \quad (12.44)$$

што је у противуречности са неједначином (12.39), заједно са условом (12.40). У том случају долази до појаве ударне реакције везе, која мења брзину тачке тако да она не противуречи услову (12.39) и условима који из њега произилазе. Тренутак T_1 одговара почетку удара.

За време удара извод df/dt представља непрекидну функцију, која мења свој знак при пролазу кроз нулу.

Уколико је извод df/dt једнак нули у тренутку $t = T_m$, а у $t = T_2$ позитиван, сагласно разматрањима из претходног поглавља, долази се до закључка да временски интервал од почетка удара до тренутка $t = T_m$

одговара првој фази удара, док интервал времена од тренутка $t = T_m$ до тренутка $t = T_2 = T_1 + \tau$, односно краја удара, одговара фази успостављања. На крају друге фазе удара испуњен је услов

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=T_2} > 0 \quad (12.45)$$

и тачка напушта површ. При удару тачке о непокретну површ, тренутак који раздваја две фазе удара одређује се из услова да је пројекција брзине тачке на нормалу непокретне површи у тачки додира једнака нули, што се може изразити у аналитичкој форми:

$$\text{grad}f \cdot \vec{v}_m = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x}_m + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y}_m + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z}_m = 0, \quad (a)$$

где је \vec{v}_m брзина тачке на крају прве фазе удара, док су \dot{x}_m , \dot{y}_m и \dot{z}_m њене пројекције на осе Декартовог координатног система. За стационарне везе лева страна једначине (a) једнака је $\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=T_m}$. Крај прве фазе удара одређује се из истог услова и код нестационарних веза, тј.

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=T_m} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t=T_m} + \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x}_m + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y}_m + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z}_m = 0, \quad (12.46)$$

што се може краће записати:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t=T_m} + \vec{v}_m \cdot \text{grad}f|_{t=T_m} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t=T_m} + |\text{grad}f|_{t=T_m} u_n = 0, \quad (12.47)$$

где је u_n пројекција на нормалу површи $f(x, y, z; t) = 0$ заједничке брзине двеју тачака, тачке површи и материјалне тачке M , која удара у поменуту површ, на крају прве фазе удара. У оквирима класичне теорије удара није могуће одредити тренутак $t = T_m$ у коме се прва фаза удара завршава. Због веома кратког времена трајања удара претпоставља се да координате тачке и време задржавају своје вредности, које су имали у тренутку $t = T_1$ на почетку удара. На основу тих претпоставки може се написати:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t=T_1} + |\text{grad}f|_{t=T_1} u_n = 0. \quad (12.48)$$

Применом теореме (12.11) о промени количине кретања материјалне тачке за сваку фазу удара добија се:

$$\begin{aligned} mu_n - mv_n &= I_{N_1}, \\ mv'_n - mu_n &= I_{N_2}. \end{aligned} \quad (12.49)$$

Разлике пројекција $u_n - v_n$ и $v'_n - u_n$ представљају пројекције на нормалу релативне брзине тачке површине $f(x, y, z; t) = 0$ и брзине тачке M на почетку прве и крају друге фазе удара.

Уколико је позната релација:

$$I_{N_2} = k I_{N_1}, \quad (12.50)$$

у којој је константа k коефицијент успостављања, на основу једначина (12.48) и (12.49) могу се одредити пројекција v'_n брзине тачке M на нормалу на крају друге фазе удара, пројекција u_n брзине тачке површи, односно материјалне тачке M на нормалу на крају прве фазе удара, као и пројекције на нормалу импулса ударних реакција I_{N_1} и I_{N_2} у току прве и друге фазе удара, респективно. Пројекција импулса укупне ударне реакције одређена је збиром:

$$I_N = I_{N_1} + I_{N_2},$$

док се из једначина (12.49) одређује однос пројекција релативних брзина:

$$k = -\frac{v'_n - u_n}{v_n - u_n}, \quad (12.51)$$

што представља генерализацију израза (12.38).

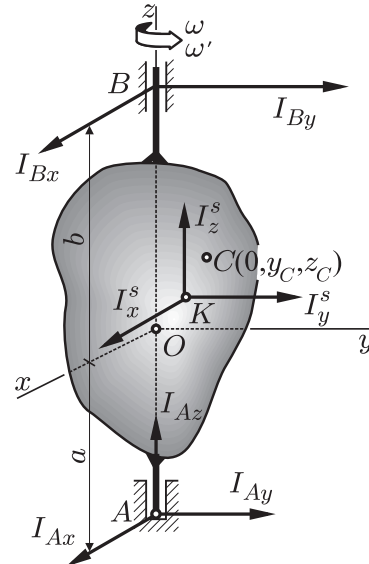
12.6 Одређивање ударних реакција тела које се обрће око непокретне осе

На слици 12.4 приказано је круто тело масе M које је везано потпорним лежиштем у тачки A и цилиндричним у тачки B . Декартов координатни систем $Axyz$ круто је везан за тело и обрће се заједно са телом око непокретне осе Az угаоном брзином интензитета ω . У неком тренутку на тело у тачки $K(x_K, y_K, z_K)$ дејствује спољашња ударна сила чији је импулс \vec{I}^s . У тачкама A и B јављају се ударне реакције чији су импулси:

$$\vec{I}_A = I_{Ax}\vec{i} + I_{Ay}\vec{j} + I_{Az}\vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{I}_B = I_{Bx}\vec{i} + I_{By}\vec{j}.$$

Непосредно после удара тело има угаону брзину интензитета ω' . Центар маса C тела налази се на координатној равни yOz и његове координате су $C(0, y_C, z_C)$. Брзине тачке C непосредно после и пре удара су:

$$\vec{v}'_C(-y_C\omega', 0, 0) \quad \text{и} \quad \vec{v}_C(-y_C\omega, 0, 0), \quad (12.52)$$



Слика 12.4