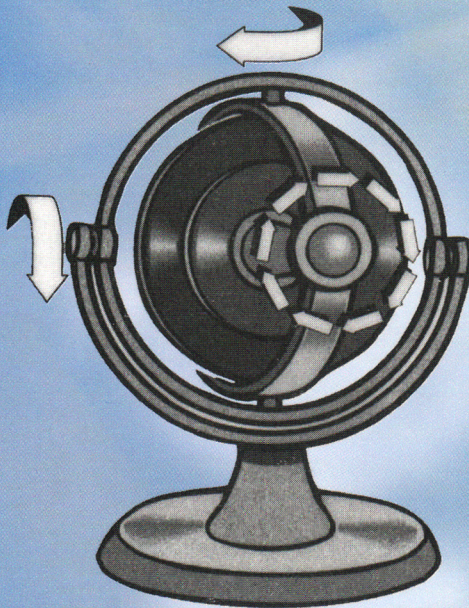


УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Никола Младеновић

МЕХАНИКА II КИНЕМАТИКА



Машински факултет
Београд

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Никола С. Младеновић

МЕХАНИКА II
КИНЕМАТИКА

Машински факултет
Београд, 2008.

Проф. др Никола Младеновић

МЕХАНИКА II - КИНЕМАТИКА

Четврто издање

Рецензенти:

Проф. др Лазар Русов

Проф. др Јосиф Вуковић

Лектор:

Косановић Бранка

Издавач:

Машински факултет

Краљице Марије 16

Београд

За издавача:

Проф. др Милош Недељковић, декан

Компјутерски слог и графичка обрада: аутор

Одобрено за штампу одлуком Декана Машинског факултета
у Београду, бр. 110/08 од 01.10.2008.

Тираж 300 примерака

ISBN 978-86-7083-641-9

Штампа:

Планета принт

Београд, Рузвелтова 10

011 3088 129

*Zabranjeno preštampavanje i fotokopiranje.
Sva prava zadržava izdavač i autori.*

Садржај

Предговор	5
Увод	7
1 Кинематика тачке	9
Померање и кретање. Закон кретања	9
1.1 Поступци одређивања кретања тачке	10
1.1.1 Векторски поступак одређивања кретања тачке	10
1.1.2 Координатни поступак одређивања кретања тачке	10
1.1.3 Природни начин задавања кретања	13
Брзина тачке	15
1.2 Векторски начин одређивања брзине тачке	15
1.3 Координатни начин одређивања брзине тачке	16
1.3.1 Брзина тачке у Декартовим координатама	16
1.3.2 Брзина тачке у поларним координатама	18
1.3.3 Брзина тачке у поларно-цилиндричним координатама	19
1.4 Брзина тачке при природном начину одређивања кретања	20
Убрзање тачке	22
1.5 Векторски начин одређивања убрзања тачке	22
1.6 Координатни начин одређивања убрзања тачке	23
1.6.1 Убрзање тачке у Декартовим координатама	23

1.6.2	Убрзање тачке у поларним координатама	24
1.6.3	Убрзање тачке у поларно-цилиндричним координатама	25
1.7	Убрзање тачке при природном начину одређивања кретања	26
1.8	Брзина и убрзање тачке у криволинијским координатама	31
1.8.1	Брзина и убрзање тачке у сферним координатама	36
1.9	Секторска брзина тачке	37
2	Кинематика крутог тела	40
	Основни задаци кинематике крутог тела	40
2.1	Транслаторно кретање крутог тела	42
2.2	Обртање крутог тела око непомичне осе	43
2.2.1	Угао обртања и коначна једначина кретања крутог тела при обртању око непомичне осе	43
2.2.2	Угаона брзина и угаоно убрзање	45
2.2.3	Вектор угаоне брзине и угаоног убрзања	46
2.2.4	Брзине и убрзања тачака тела при обртању око непомичне осе	48
2.3	Равно кретање крутог тела	51
2.3.1	Брзине тачака тела при равном кретању	53
2.3.2	Тренутни пол брзина равне фигуре	57
2.3.3	Одређивање брзина тачака равне фигуре методом тренутног пола брзина	60
2.3.4	Убрзања тачака тела при равном кретању	61
2.3.5	Тренутни пол убрзања равне фигуре	64
2.3.6	Одређивање убрзања тачака равне фигуре методом тренутног пола убрзања	67
2.3.7	Теорема о коначном померању равне фигуре. Центроиде	68
2.3.8	Једначине непокретне и покретне центроиде	71
2.4	Обртање крутог тела око непомичне тачке	73
2.4.1	Брзине тачака крутог тела и вектор тренутне угаоне брзине при сферном кретању	76
2.4.2	Вектор коначне и елементарне ротације крутог тела при сферном кретању. Родригов образац	79
2.4.3	Ојлерове кинематичке једначине	87
2.4.4	Тренутно угаоно убрзање крутог тела при сферном кретању	88
2.4.5	Брзине тачака крутог тела при сферном кретању	91
2.4.6	Убрзања тачака крутог тела при сферном кретању	94

2.5	Опште кретање слободног крутог тела	97
2.5.1	Брзине тачака слободног крутог тела при општем кретању	98
2.5.2	Убрзања тачака слободног крутог тела при општем кретању	100
3	Сложено кретање тачке	101
	Основни појмови. Апсолутни и релативни изводи вектора	101
3.1	Апсолутна брзина тачке	104
3.2	Апсолутно убрзање тачке	105
3.2.1	Кориолисово убрзање тачке	107
4	Сложено кретање крутог тела	109
	Основни појмови слагања кретања крутог тела	109
4.1	Слагање трансляторних кретања крутог тела	110
4.2	Слагање обртних кретања крутог тела	111
4.2.1	Слагање обртања крутог тела око оса које се секу	111
4.2.2	Слагање обртања крутог тела око паралелних оса	112
4.2.3	Кинематички спрег	115
4.3	Слагање трансляторних и обртних кретања крутог тела	116
4.3.1	Брзина трансляторног кретања управна на вектор угаоне брзине	116
4.3.2	Брзина трансляторног кретања колинеарна вектору угаоне брзине	117
4.3.3	Брзина трансляторног кретања заклапа произвољни угао са вектором угаоне брзине	118
4.4	Општи случај слагања кретања крутог тела	120
5	Основи примене нумеричких метода у кинематици	123
5.1	Обичне диференцијалне једначине	123
5.1.1	Ојлеров поступак интеграције	125
5.1.2	Рунге-Кута метод	127
5.2	Примери решавања система диференцијалних једначина	129
5.2.1	Решавање проблема са задатим почетним условима	130
5.2.2	Решавање проблема са задатим граничним условима	138
	Литература	147
	Индекс	149

Предговор

Ова књига написана је у складу са наставним планом и програмом предмета МЕХАНИКА II (КИНЕМАТИКА) који се предаје на Машинском факултету Универзитета у Београду и намењена је првенствено студентима машинских факултета, премда она може бити од користи и студентима осталих техничких факултета и виших машинских школа. Непосредан повод за издавање ове публикације није проистекао из потребе да се њоме попуни недостатак оваквих издања у домаћој стручној литератури, већ да се увођењем неких нових научних поступака везаних за примену нумеричке анализе студентима омогући да прошире теоријско знање.

Користећи се искуством, стеченим у раду са студентима, аутор се трудио да читаоце ове књиге оспособи, стицањем основног теоријског знања, за решавање разних проблема са којима се сусрећу у техничкој пракси. Будући да је студентима на располагању и велики број збирки задатака из области које теоријски обрађује ова књига, аутор није сматрао за потребно да допунску пажњу посвети и решавању задатака. У том смислу студенти се упућују да избором неке од постојећих збирки задатака олакшају себи полагање писменог дела испита.

Књига је подељена на пет тематских целина: 1. *Кинематика тачке*, 2. *Кинематика крутог тела*, 3. *Сложено кретање тачке*, 4. *Сложено кретање крутог тела* и 5. *Основи примене нумеричких метода у кинематици*. Прве четири главе у потпуности прате и покривају наставни план и програм предмета, док је пета, последња, глава намењена првенствено оним читаоцима који су окренути ка решавању конкретних проблема у научној и техничкој пракси применом савремених метода нумеричке анализе. Полазећи од претпоставке да студенти поседују задовољавајуће предзнање из области програмирања на програмском језику FORTRAN аутор се није устручавао да са неколико примера подстакне машту читаоца и пружи му основне идеје у решавању проблема који немају решење у затвореној, аналитичкој форми.

Аутор на овај начин жели да изрази своју дубоку захвалност рецензентима, проф. др Лазару Русову и проф. др Јосифу Вуковићу, на великој помоћи и уложеном труду при прегледу рукописа и настојању

да корисним саветима допринесу бољем садржају и изгледу ове књиге. Свом колеги др Зорану Стокићу, асистенту Машинског факултета у Београду, захваљујем на низу корисних сугестија у писању уводног дела књиге.

Користим прилику да се захвалим и свим својим пријатељима који су ми пружили велику помоћ у техничкој припреми и реализацији књиге.

АУТОР

у Београду,
септембар 1996.

Глава 4

Сложено кретање крутог тела

Основни појмови слагања кретања крутог тела

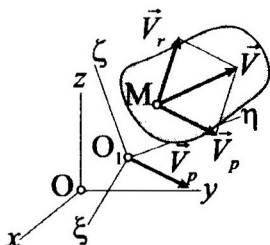
Анализа општег кретања слободног крутог тела у поглављу 2.5 показала је да се то кретање може сматрати сложеним из трансляторног кретања тела, једнаког кретању произвољно изабраног пола, и обртања тела око тог пола. На тај начин имплицитно је показано да се једно кретање тела може разложити на више простијих кретања.

У овој глави кретање крутог тела биће разматрано са друге тачке гледишта, тј. биће примењена метода синтезе кретања крутог тела. *Синтеза* или *слагање* кретања представља поступак слагања простијих кретања крутог тела у циљу формирања његовог сложеног, резултујућег кретања.

Као и у глави 3, када је разматрано сложено кретање тачке, потребно је увести два система референције која нису круто везана за тело у кретању. Први од њих сматра се условно непокретним, док је други координатни систем покретан у односу на поменути, условно непокретни координатни систем. Кретање тела у односу на условно непокретни систем референције одређује његово *апсолутно кретање*. *Релативно кретање* крутог тела представља његово кретање у односу на покретни координатни систем, док је *преносно кретање* крутог тела последица кретања покретног координатног система у односу на условно непокретни. Овакво разматрање омогућава одређивање апсолутних, преносних и релативних брзина тачака крутог тела.

Закључци изведени слагањем два простија кретања крутог тела лако се могу уопштити на синтезу произвољног броја простијих кретања крутог тела.

4.1 Слагање транслаторних кретања крутог тела



Слика 4.1

На слици 4.1 приказано је транслаторно кретање крутог тела у односу на покретни координатни систем $O_1\xi\eta\zeta$, који се транслаторно креће у односу на условно непокретни систем референције $Oxyz$. С обзиром на чињеницу да је релативно кретање тела транслаторно, свака његова тачка имаће релативну брзину једнаку релативној брзини \vec{V}_1 произвољно изабране тачке M , тј.

$$\vec{V}_r = \vec{V}_1. \quad (4.1)$$

Како је и преносно кретање, тј. кретање покретног координатног система $O_1\xi\eta\zeta$ у односу на непокретни координатни систем $Oxyz$, транслаторно, то ће и преносне брзине тачака крутог тела бити једнаке преносној брзини \vec{V}_2 посматране тачке M , односно

$$\vec{V}_p = \vec{V}_2. \quad (4.2)$$

На основу једначина (4.1) и (4.2) закључује се, применом теореме о слагању брзина, исказане једначином (3.15), да ће све тачке крутог тела имати једнаку апсолутну брзину

$$\vec{V} = \vec{V}_p + \vec{V}_r = \vec{V}_1 + \vec{V}_2, \quad (4.3)$$

што значи да ће и апсолутно кретање крутог тела бити транслаторно.

На основу изложеног може се закључити да је *резултат слагања два транслаторна кретања крутог тела такође транслаторно кретање у односу на непокретни систем референције, при чему је брзина резултујућег кретања одређена векторским збиром брзина компонентних транслаторних кретања.*

У случају да је кретање тела сложено из n једновремених транслаторних кретања може се показати, узастопним примењивањем једначине (4.3), да је резултујуће кретање транслаторно брзином

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \dots + \vec{V}_n = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i, \quad (4.4)$$

при чему су са \vec{V}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) означене брзине компонентних транслаторних кретања крутог тела.